DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT II: LUENNOISTA

JARMO JÄÄSKELÄINEN

1. Ensimmäinen viikko

Johdantona systeemeihin tutustuttiin tartuntatautumalliin SIS (luentomoniste 2.3.1) ja autonomisten systeemien dynamiikkaan kurkistimme Lorenz-systeemin simulaatiolla.

Aloitimme lokaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen (Lause 4.4 luentomonisteessa). Olemme käyneet lävitse vaiheet 1, 2 ja 3.

2. Toinen viikko

Kävimme lävitse lokaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistuksen vaiheet 4 ja 5 sekä todistimme luentomonisteen lemman 4.2.

Tutustuimme myös skalaariyhtälön palautukseen systeemiksi (luentomoniste 5.2).

Muuten luennoilla käsiteltiin peruskäsitteitä matriiseista ja lineaarisista systeemeistä luentomonisteen sivuilta 64–67 (esimerkiksi perusjärjestelmä ja Wronskin determinantti). Aloitimme lauseen 5.9 todistuksen.

3. Kolmas viikko

Todistimme luentomonisteen lauseen 5.9 loppuun.

Tutkimme vakiokertoimisten ensimmäisen kertaluvun systeemien ratkaisemista, luentomonisteen sivut 68–76.

4. Neljäs viikko

Todistimme luentomonisteen Lemman 5.14 erikoistapauksessa (kun ominaisarvot erillisiä) eli

Lause. Jos matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen (eli $A = A^T$), sen ominaisarvot ovat reaaliset ja sillä on n lineaarisesti riippumatonta, reaalista ominaisvektoria.

Väite 1. Ominaisarvot ovat reaaliset (Harjoitus 4, tehtävä 1).

Väite 2. Löytyy reaaliset ominaisvektorit.

Todistus. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ (reaalinen väitteen 1 perusteella) on ominaisarvo ja $\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ on sitä vastaava ominaisvektori, niin $A\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$ ja $A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$. Ja $\mathbf{a}$ tai $\mathbf{b}$ kelpaa reaaliseksi ominaisvektoriksi, sillä ominaisvektorina $\mathbf{u} \neq 0$, joten ainakin toinen vektoreista $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ on eri suuri kuin 0. □

Väite 3. Ominaisvektorit ovat kohtisuorassa.

Todistus. Olkoon $\lambda \neq \mu$ ominaisarvoja ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ väitteen 1 perusteella) ja $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ niitä vastaavat reaaliset ominaisvektorit (jotka siis löytyvät väitteen 2 perusteella).

Nyt pitää osoittaa, että vektorien sisätulo on 0 eli $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$.

$$\lambda \mathbf{u}^T \mathbf{v} = (\lambda \mathbf{u})^T \mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T \mathbf{v} = (\mathbf{u}^T A^T)\mathbf{v} = \mathbf{u}^T (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T (\mu \mathbf{v}) = \mu \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Siis $(\lambda - \mu)\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$. Koska $\lambda \neq \mu$, niin $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$. □

Kun ominaisarvot erillisiä, Lauseen tulos seuraa väitteistä 1, 2 ja 3 Lineaarialgebran ja matriisilaskennan kurssin tulosten perusteella (itse asiassa reaaliset ominaisvektorit $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ muodostavat ortonormaalin kannan ja A voidaan diagonalisoida siten, että diagonaalimatriisi muodostuu ominaisarvoista).

Tutustuimme myös yleistettyihin ominaisvektoreihin (luentomonisteen sivut 76–79) ja epähomogeenisiin lineaarisiin systeemeihin (sivut 79–82).

5. Viides viikko

Käsittelimme autonomisia systeemejä: luentomonisteen luku 6.1 ja Lauseet 6.3, 6.4 sekä Esimerkki 6.7.

6. Kuudes viikko

Kriittisten pisteiden laatu, sivut 83–91.

7. Seitsemäs viikko

Kerrattiin.