

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017**  
**Harjoitus 6**

*Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 3. ja 5.5.2017.*

1. Olkoon  $y : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

ratkaisu, missä  $q$  on jatkuva funktio.

Montako sellaista ratkaisua yhtälöllä on, jolle löytyy jono  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , siten, että  $x_n \rightarrow 0$  ja  $y(x_n) = 0$ ? Mitä ne ovat/Mikä se on?

2. Määrää kriittiset pisteet ja niiden laatu

$$\text{a) } \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Mallinnetaan virusepidemiaa systeemillä

$$\begin{cases} P'(t) = -aP(t)I(t) \\ I'(t) = aP(t)I(t) - bI(t) \end{cases} ,$$

missä  $a$  ja  $b$  ovat positiivisia vakioita,  $P$  on potentiaalisten tartunnansaajien lukumäärä ja  $I$  on infektiokantajien lukumäärä.

- a) Määrää kriittiset pisteet ja radat sekä luonnostelee mallin aikakehitys/virtauskuviot.  
b) Milloin voi syntyä epidemia eli  $I$  on aidosti kasvava funktio?

4. Määrää kriittisen pisteen  $(4, 3)$  laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = 33 - 10x(t) - 3y(t) + x(t)^2 \\ y'(t) = -18 + 6x(t) + 2y(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

5. Määrää kriittisen pisteen  $(0, 0)$  laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) + 2x(t)^2 - 3y(t)^2 \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 7x(t)y(t) \end{cases}$$

6. Mikä on kriittisen pisteen  $(0, 0)$  laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = \epsilon x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + \epsilon y(t) \end{cases} ,$$

kun

- a)  $\epsilon = 0$     b)  $\epsilon < 0$     c)  $\epsilon > 0$  ?