HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 3. ja 5.5.2017.

1. Olkoon $y : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + q(x)\, y(x) = 0$$

ratkaisu, missä q on jatkuva funktio.

Montako sellaista ratkaisua yhtälöllä on, jolle löytyy jono x_n, $n = 1, 2, \ldots$, siten, että $x_n \to 0$ ja $y(x_n) = 0$? Mitä ne ovat/Mikä se on?

Ratkaisu: Lineaarinen skalaarinen differentiaaliyhtälömme toteuttaa OY-lauseen (materiaalin Lause 5.4) oletukset, sillä q on jatkuva välillä $(-1, 1)$. Kyseisen lauseen mukaan alkuarvotehtävällä on tällöin yksikäsitteinen ratkaisu.

Nimensä mukaisesti alkuarvotehtävä kuitenkin vaatii alkuarvot $y(x_0)$ ja $y'(x_0)$ jollakin $x_0 \in (-1, 1)$. Koska ratkaisumme on jatkuva, tehtävänannossa annetulle jonolle x_n tulee päteä

$$y(0) = \lim_{n\to\infty} y(x_n) = 0.$$

Toisaalta, jos $x_n \neq 0$, erotusosamäärästä saamme

$$y'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{y(0) - y(x_n)}{0 - x_n} = \frac{0 - 0}{0 - x_n} = 0.$$

Siispä OY-lauseen mukaan tehtävällämme on tasan yksi ratkaisu, joka toteuttaa annetun ehdon. Lisähuomautuksena voimme havaita, että tämä ratkaisu on itseasiassa triviaaliratkaisu $y \equiv 0$.

HUOMAA: Ratkaisussa oletettiin, että luvut x_n ovat erisuuria (kuten tehtävänannossa oli tarkoitus lukea). Erikoistapauksessa, jossa $x_n = 0$ jostain indeksistä n lähtien, jokainen alkuarvo $y'(0) = a \in \mathbb{R}$ määrää OY-lauseen mukaan yksikäsitteisen ratkaisun (joten tehtävällä olisi äärettömän monta ratkaisua).

2. Määrää kriittiset pisteet ja niiden laatu

$$\text{a)} \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu:

(a) Koska kerroinmatriisin determinantti on

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

niin systeemillä on tasan yksi kriittinen piste $\mathbf{x}_0$. Systeemi on yhtälöryhmäksi kirjoitettuna muotoa

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) + 6 \\ y'(t) = x(t) - y(t) + 4 \end{cases},$$

missä $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, ja kriittinen piste $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x_0 - y_0 + 6 = 0 \\ x_0 - y_0 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 5 \end{cases} .$$

Pisteen $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ laatu on sama kuin origon laatu systeemissä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

ja se selviää laskemalla matriisin ominaisarvot. Sen karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - (-1)\cdot 1 = (\lambda+1)^2 + 1,$$

jonka juuret ovat $\lambda = -1 \pm i$. Koska reaaliosa on negatiivinen, on $\mathbf{x}_0$ asymptoottisesti stabiili.

(b) Koska kerroinmatriisin determinantti on

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 4 - (-5)\cdot 5 = 9 \neq 0,$$

niin systeemillä on tasan yksi kriittinen piste $\mathbf{x}_0$. Sen voi ratkoa myös suoraan matriisimuodossa: se toteuttaa yhtälön

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

josta ratkotaan

$$\mathbf{x}_0 = -\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kuten äsken, pisteen $\mathbf{x}_0$ laadun määräävät kerroinmatriisin ominaisarvot. Matriisin karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(4-\lambda) - (-5)\cdot 5 = \lambda^2 - 16 + 25 = \lambda^2 + 9,$$

jonka juuret $\lambda = \pm 3i$ ovat puhtaasti imaginääriset, joten x_0 on keskus (erityisesti stabiili).

3. Mallinnetaan virusepidemiaa systeemillä

$$\begin{cases} P'(t) = -a\,P(t)\,I(t) \\ I'(t) = a\,P(t)\,I(t) - b\,I(t) \end{cases},$$

missä a ja b ovat positiivisia vakioita, P on potentiaalisten tartunnansaajien lukumäärä ja I on infektionkantajien lukumäärä.

a) Määrää kriittiset pisteet ja radat sekä luonnostele mallin aikakehitys/virtauskuvio.

b) Milloin voi syntyä epidemia eli I on aidosti kasvava funktio?

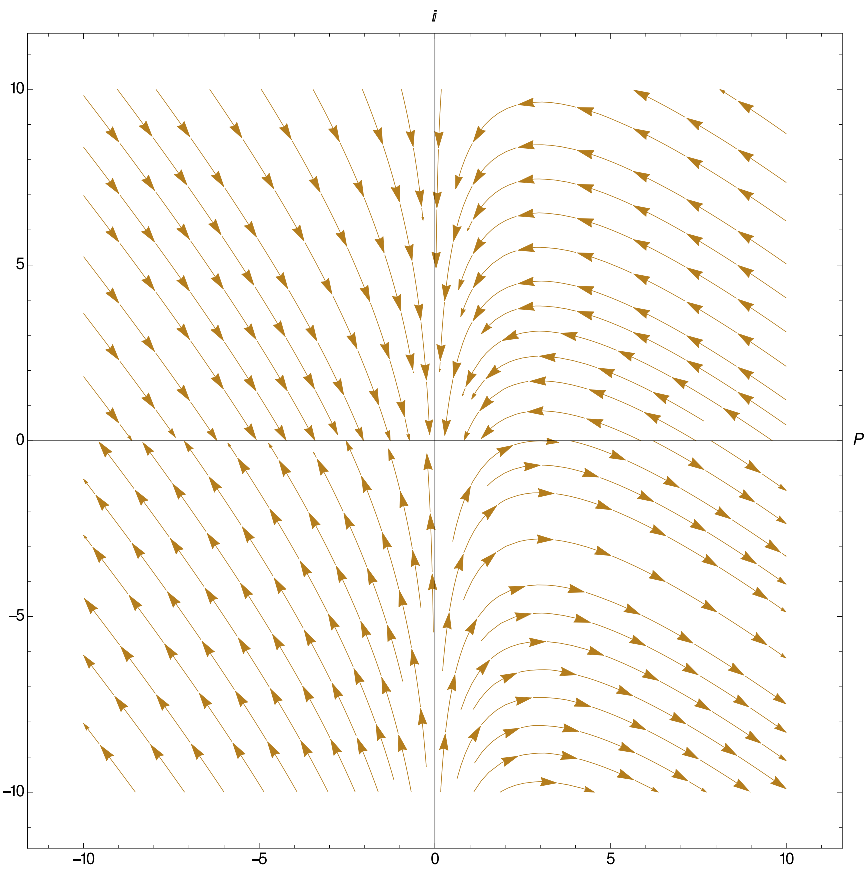
Ratkaisu: a) Systeemin kriittiset pisteet saadaan määritelmästä (6.1), eli määrittelemällä $f(P,I) = -aPI$ ja $g(P,I) = aPI - bI$ vaaditaan siis $f(P_0, I_0) = g(P_0, I_0) = 0$, joten kriittiset pisteet ovat muotoa $(P_0, I_0) = (\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Virtauskuviota varten ratkaistaan radat opetusmonisteen kaavasta (6.2):

$$
\begin{aligned}
I'(P) =& \frac{dI}{dP} = \frac{g(P,I)}{f(P,I)} = \frac{aPI - bI}{-aPI} = -1 + \frac{b}{aP} \Leftrightarrow \\
\int dI =& \int (-1 + \frac{b}{aP}) dP \\
I(P) =& -P + \frac{b}{a} \ln|P| + C, C \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

Kaukana origosta ratakäyrät ovat siis laskevia suoria, ja pienillä P:n arvoilla käyttäytyvät logaritmin tavoin.

Virtauskaavion suunnat saadaan määrättyä esimerkiksi yhtälöstä $P'(t) = -aP(t)I(t)$, ja tarkastelemalla neljännes kerrallaan. Esimerkiksi alueessa jossa $P > 0, I > 0$ niin $P'(t) < 0$, eli suuntanuolet osoittavat vähenevään P-akselin suuntaan. Saadaan luonnosteltua aikakehitys (tässä valittu helpot vakiot $a = 1, b = 3$):



b) Kuten SIR-mallille on tavallista (ja tehtävänannon pohjalta perusteltua) niin oletetaan nyt laskun yksinkertaistamiseksi että $I, P \geq 0$. Selvitetään, milloin I on aidosti kasvava: kirjoitetaan tehtävänannosta uudelleen yhtälö $I'(t) = aP(t)I(t) - bI(t) = I(t)(aP - b)$, eli jollakin alkuarvolla t_0 tulee päteä $I'(t_0) = I(t_0)(aP(t_0) - b) > 0$ ja mikäli $I(t_0) \neq 0$, niin tällöin $aP(t_0) - b > 0$ eli $P(t_0) > \frac{b}{a}$. Siis epidemia puhkeaa vain jos taudille alttiitten lukumäärä on suurempaa kuin kynnys $\frac{b}{a} := \frac{1}{R_0}$, ja kääntäen, infektoituneiden määrä kääntyy laskuun, jos $P < \frac{b}{a}$. Molemmat tulokset ovat havaittavissa virtauskaaviosta.

4. Määrää kriittisen pisteen $(4,3)$ laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = 33 - 10\,x(t) - 3\,y(t) + \,x(t)^2 \\ y'(t) = -18 + 6\,x(t) + 2\,y(t) - x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Ratkaisu: Käytetään kriittisen pisteen $(4,3)$ laadun määrittämisessä opetusmonisteen Lausetta 6.5 (Poincarén stabiilisuuslause), jonka mukaan autonomisen systeemin kriittisen pisteen $\vec{0}$ laatu on sama kuin sen linearisoinnissa, kunhan tässä pisteessä a) autonomisen systeemin määrittelevät funktiot $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia; b) systeemin derivaattamatriisi on kääntyvä; c) ominaisarvot ovat erisuuret ja eivät puhtaasti imaginääriset. Noteerataan myös opetusmonisteen sivun 88 huomautus, eli mikäli kriittisen pisteen laatu saadaan Poincarén stabiilisuuslauseesta, ei siirtoa tarvitse konkreettisesti tehdä. Osoitetaan aluksi suoralla laskulla että Poincarén lausetta voidaan hyödyntää.

Määrittelemällä $f(x,y) = 33 - 10x - 3y + x^2$, $g(x,y) = -18 + 6x + 2y - xy$, jotka ovat epäilemättä jatkuvasti derivoituvia, systeemin derivaattamatriisi on siis kaavaa (6.12) käyttäen

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 + 2x & -3 \\ 6 - y & 2 - x \end{bmatrix},$$

ja kriittisessä pisteessä $(4,3)$

$$A(4,3) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

jolloin $\det A(4,3) = 13 \neq 0$ ja ominaisarvot:

$$\det(A(4,3) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm 3i.$$

Koska pisteessä $(4,3)$ derivaattamatriisi on kääntyvä ja sen ominaisarvot ovat erisuuret (eivätkä myöskään puhtaasti imaginääriset), niin Poincarén stabiilisuuslausetta voidaan käyttää. Nyt, koska ominaisarvot ovat kompleksiset ja reaaliosat ovat negatiiviset, on kriittinen piste $(4,3)$ asymptoottisesti stabiili.

5. Määrää kriittisen pisteen $(0,0)$ laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = 4\,x(t) + 2\,y(t) + 2\,x(t)^2 - 3\,y(t)^2 \\ y'(t) = 4\,x(t) - 3\,y(t) + 7\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Ratkaisu: Merkitään $f(x,y) = 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2$ ja $g(x,y) = 4x - 3y + 7xy$, jolloin systeemi saa muodon

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

Ensinnäkin $f(0,0) = 0 = g(0,0)$, eli origo todella on kriittinen piste. Lisäksi funktiot f ja g ovat jatkuvasti derivoituvia kaikkialla, eli erityisesti jossain origon ympäristössä. Linearisoidaan origon ympäristössä ja katsotaan voisimmeko käyttää Poincarén lausetta (kuten edellisessä tehtävässä).

Lasketaan linearisointia varten osittaisderivaatat:

$$\partial_x f(x,y) = 4 + 4x, \qquad \partial_y f(x,y) = 2 - 6y,$$
$$\partial_x g(x,y) = 4 + 7y, \qquad \partial_y g(x,y) = -3 + 7x,$$

jolloin linearisointimatriisi A on

$$A = \begin{bmatrix} \partial_x f(0,0) & \partial_y f(0,0) \\ \partial_x g(0,0) & \partial_y g(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nyt Poincarén lauseen mukaan kriittisen pisteen $(0,0)$ laadun määräävät matriisin A ominaisarvot. Sen karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) - 2\cdot 4 = \ldots = (\lambda+4)(\lambda-5),$$

jonka juuret ovat $\lambda = -4$ ja $\lambda = 5$. Koska ominaisarvot ovat erimerkkiset, niin origo on siten satulapiste (eli erityisesti epästabiili).

6. Mikä on kriittisen pisteen $(0,0)$ laatu autonomisessa systeemissä

$$\begin{cases} x'(t) = \epsilon\, x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + \epsilon\, y(t) \end{cases},$$

kun

a) $\epsilon = 0$ b) $\epsilon < 0$ c) $\epsilon > 0$?

Ratkaisu: Olkoon $A = \begin{bmatrix} \epsilon & -1 \\ 1 & \epsilon \end{bmatrix}$. Merkitään $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t)]^T$. Nyt annettu differentiaaliyhtlösysteemi on matriisimuodossa

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Matriisin A ominaisarvot voidaan ratkaista yhtälöstä

$$(\epsilon - \lambda)^2 = -1,$$

joka toteutuu, kun $\lambda = \epsilon \pm i$. Luentomonisteen lauseen 6.2 mukaan kriittisen pisteen laatu matriisin A ominaisarvojen ollessa kompleksisia määräytyy niiden reaaliosan, eli luvun ϵ mukaan seuraavasti.

a) Kriittinen piste on stabiili keskus, kun $\epsilon = 0$.

b) Kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili, kun $\epsilon < 0$.

c) Kriittinen piste on epästabiili, kun $\epsilon > 0$.