HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 26. ja 28.4.2017.

2. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet, ratakäyrät ja luonnostele systeemin aikakehitys:

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t)+1)(y(t)-2) \\ y'(t) = x(t)^2 - x(t) - 2 \end{cases}$$

Ratkaisu: Merkitään $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ ja $g(x,y) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, jolloin systeemi saa muodon

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases},$$

jolloin kriittiset pisteet ovat yhtälöparin $f(x,y) = 0 = g(x,y)$ eli $(x+1)(y-2) = (x+1)(x-2)$ ratkaisut. Siten kriittisten pisteiden joukko koostuu pisteestä $(2,2)$ ja suorasta $x = -1$.

Ratkaisujen ratakäyrät saadaan implisiittisesti ratkaistua yhtälöstä

$$y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2}{y-2},$$

joka on separoituvana helppo ratkaista: saadaan

$$\int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$$

eli

$$\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + C_1,$$

missä $C_1 \in \mathbb{R}$. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $(y-2)^2 - (x-2)^2 = C$: tästä nähdään, että ratakäyrät ovat $(2,2)$-keskisiä hyperbelejä, joiden asymptoottien kulmakertoimet ovat ± 1. (Tapauksessa $C > 0$ hyperbelin osat aukeavat ylös- ja alaspäin, tapauksessa $C < 0$ osat aukeavat oikealle ja vasemmalle, ja tapauksessa $C = 0$ saadaan pisteen $(2,2)$ kautta kulkevat asymptootit.)

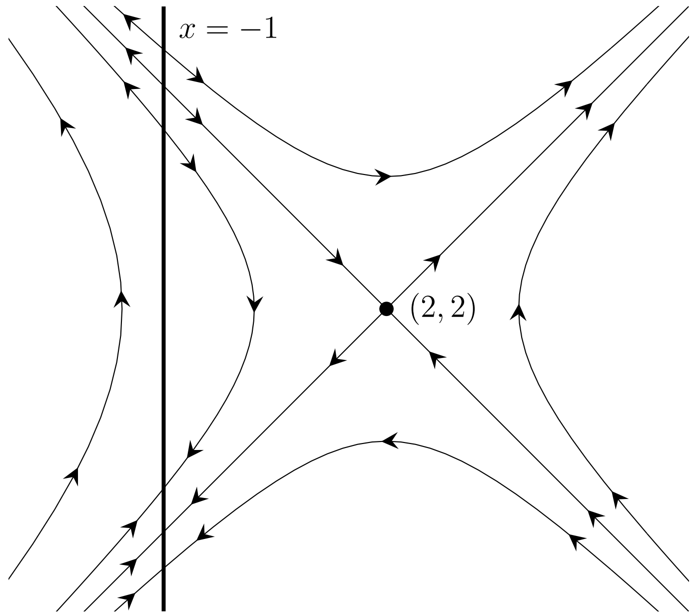
Ratojen kulkusuunnat saadaan laskemalla derivaatan merkit systeemin määräämästä yhtälöstä. Esimerkiksi pisteessä $(3,3)$ saadaan

$$x' = (x+1)(y-2) = (3+1)(3-2) = 4 > 0,$$

joten x-koordinaatin muutos on positiivinen ja rata lähtee liikkumaan x-akselin suuntaan, siis yläviistoon.

Vaikkei niitä kysyttykään, tutkitaan vielä kriittisten pisteiden laadut. Piste $(2,2)$ on satulapiste, sillä alaviistoon kulkevalla suoralla radat suppenevat siihen, mutta yläviistoon kulkevalla suoralla radat lähtevät poispäin.

Suoralla $x = -1$ pisteet, joilla $y < 2$, ovat stabiileja, sillä tällä puolen radat suppenevat kohti suoraa kohti. Pisteet, joilla $y > 2$, ovat epästabiileja, sillä tällöin radat loittonevat suorasta. Myös piste $(-1,2)$ on epästabiili, sillä sen vasemmalla puolen pisteet kulkevat hyperbelin mukana ylös-ja poispäin.



3. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet, ratakäyrät ja luonnostele systeemin aikakehitys:

$$\begin{cases} x'(t) = -8\,y(t) \\ y'(t) = 18\,x(t) \end{cases}$$

Ratkaisu: Merkitään $x'(t) = -8\,y(t) = f(x(t), y(t))$ ja $y'(t) = 18\,x(t) = g(x(t), y(t))$. Määritelmän 6.1. mukaan piste (x_0, y_0) on annetun autonomisen systeemin kriittinen piste jos $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Vaaditaan siis $18x = -8y$, joten ainoa kriittinen piste on $(0, 0)$.

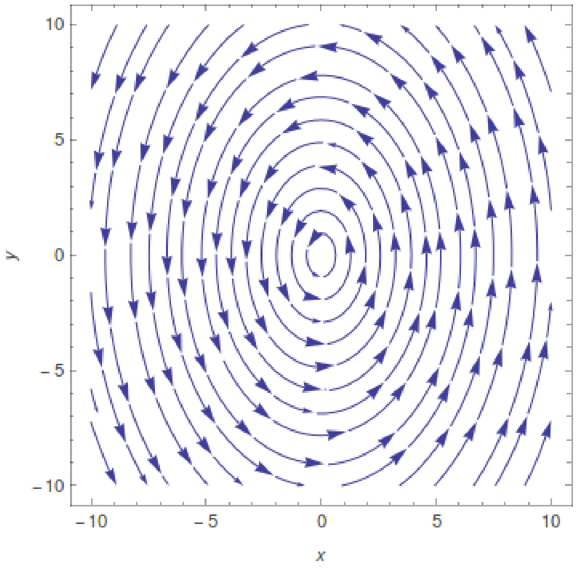
Ratkaistaan autonomisen systeemin radat luentomonisteen kaavasta (6.2), siis

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{18x}{-8y},$$

joka on separoituva yhtälö. Ratkaistaan se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y} \Leftrightarrow \int -4y dy = \int 9x dx \Leftrightarrow 4y^2 + 9x^2 = C, C \in \mathbb{R}$$

eli systeemin radat ovat xy-tasossa ellipsejä. Ratojen suunnat saadaan esimerkiksi yhtälöä $x'(t) = -8y(t)$ tutkimalla (tai yhtä lailla yhtälöstä $y'(t) = 18x(t)$). Päätellään, että x-akselin suuntainen muutos on positiivista kun $y < 0$, ja vastaavasti x-akselin suuntainen muutos on negatiivista, kun $y > 0$. Radat kiertävät siis vastapäivään. Ohessa virtauskaavio (laadittu WolframAlphan Streamplot-funktiolla, syntaksi on StreamPlot[-8y,18x,x,-10,10,y,-10,10]):



4. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet, ratakäyrät ja luonnostele systeemin aikakehitys:

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t)-4)(1-y(t)) \\ y'(t) = (x(t)+1)(x(t)-4). \end{cases}$$

Ratkaisu: Merkitään $f(x,y) = (x(t)-4)(1-y(t))$ ja $g(x,y) = (x(t)+1)(x(t)-4)$. Määritelmän 6.1. mukaan piste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on systeemin kriittinen piste, mikäli $f(x_0,y_0) = 0 = g(x_0,y_0)$. Tämä pätee pisteessä $(-1,1)$, sekä suoralla $x = 4$. Systeemin kriittisten pisteiden joukko on siis $\{(1,-1)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2) \mid x = 4\}$.

Oletetaan, että $x'(t) \neq 0$, eli että $x \neq 4$ ja $y(t) \neq 1$. Saamme ratkaistua systeemin ratakäyrät yhtälöstä

$$y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(1-y)} = \frac{x+1}{1-y}.$$

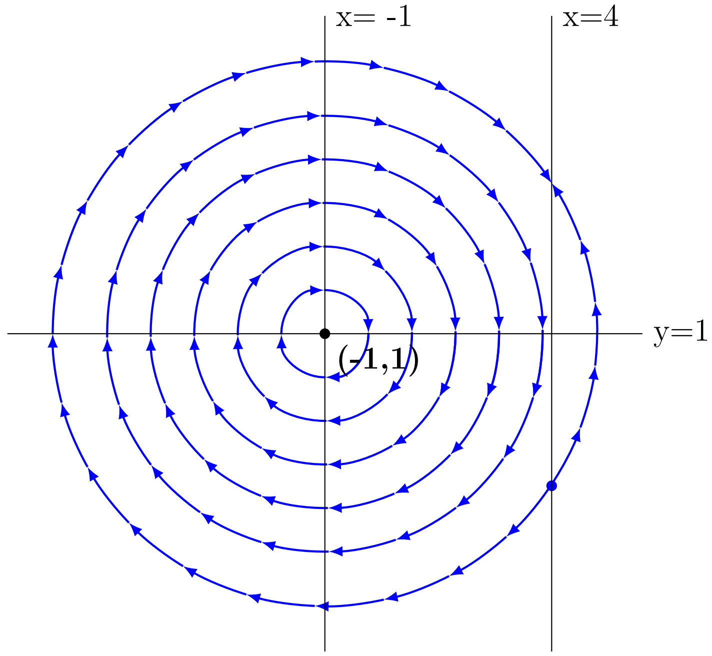
Kyseiselle separoituvalle ensimmäisen kertaluokan differentiaaliyhtälölle saadaan implisiittiratkaisu $F(x,y) = y^2 - 2y + x^2 + 2x + 2 = (y-1)^2 + (x+1)^2$. Systeemin ratakäyrät ovat tämän implisiittiratkaisun tasa-arvokäyriä, eli ympyröitä, joiden keskipiste on $(-1,1)$.

Kriittisen pisteen $(-1,1)$ luonne on siis helppo päätellä. Lähellä pistettä $(-1,1)$ ajanhetkellä t_0 olevat ratkaisut pysyvät pisteen lähellä, joten $(-1,1)$ on systeemin stabiili kriittinen piste.

Tarkastelemme seuraavaksi kriittisten pisteiden $(4,y)$ luonnetta tarkastelemalla, mihin suuntaan systeemin ratkaisut kiertävät radoillaan (ks. esimerkki 6.7):

$$y'(t) = (x(t)+1)(x(t)-4) \begin{cases} > 0, \text{ kun } x < -1; \\ < 0, \text{ kun } -1 < x < 4; \\ > 0, \text{ kun } x > 4; \end{cases}$$

Suora $y = -1$ siis jakaa suoralla $x = 4$ olevat kriittiset pisteet stabiileihin ja epästabiileihin: Lähellä pistettä $(4,y)$ olevat ratkaisut pysyvät kyseisen pisteen lähellä, jos $y > 1$ ja päin vastoin pisteille, joilla $y \leq 1$.



5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Muodostetaan ensin ongelmaa vastaavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä. Matriisin

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -1$. Näitä vastaavat ominaisvektorit ovat $\mathbf{u_1} = [1 \ -1]^T$ ja $\mathbf{u_2} = [1 \ 1]^T$. Ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla saamme homogeenisysteemille perusjärjestelmän muodostavat ratkaisut

$$\mathbf{x_1}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{x_2}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Etsitään seuraavaksi annetulle epähomogeenisysteemille yksittäisratkaisu. Käytetään seuraavaa yritettä:

$$\mathbf{x_p} = \mathbf{a}e^{2t} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

missä $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\mathbf{x_p'}(t) = 2\mathbf{a}e^{2t} + \mathbf{b}.$$

Sijoittamalla tämä annettuun epähomogeeniseen systeemiin, saamme yhtälön

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a}e^{2t} + \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{a}e^{2t} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}) + \begin{bmatrix} t \\ e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -b_2 \\ -b_1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Yllä esitetystä matriisiyhtälöstä saamme seuraavat kolme yhtälöparia termien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ komponenttien selvittämiseksi.

$$\begin{cases} 2a_1 = -a_2 \\ 2a_2 = -a_1 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -b_2 + 1 \\ 0 = -b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = -c_2 \\ b_2 = -c_1 \end{cases}$$

Ratkaisemalla nämä yhtälöparit, saamme

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Siispä

$$\mathbf{x_p}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ja systeemin yleinen ratkaisu on muotoa

$$c_1\mathbf{x_1}(t) + c_2\mathbf{x_2}(t) + \mathbf{x_p}(t),$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan lopuksi alkuarvotehtävä $\mathbf{x}(0) = [0\ 1]^T$. Sijoittamalla $t = 0$ systeemin yleiseen ratkaisuun, saamme

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= c_1\mathbf{x_1}(0) + c_2\mathbf{x_2}(0) + \mathbf{x_p}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 - \frac{4}{3} \\ -c_1 + c_2 + \frac{2}{3} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöparin

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{4}{3} = 0; \\ -c_1 + c_2 + \frac{2}{3} = 1, \end{cases}$$

saamme $c_1 = \frac{1}{2}$ ja $c_2 = \frac{5}{6}$, joten alkuarvo-ongelman ratkaisu on

$$\frac{1}{2}\mathbf{x_1}(t) + \frac{5}{6}\mathbf{x_2}(t) + \mathbf{x_p}(t).$$

6. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja ratakäyrät:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ y'(t) = x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Ratkaisu: Merkitään $x'(t) = x(t)^2 = f(x(t), y(t))$ ja $y'(t) = x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)\,y(t) = g(x(t), y(t))$. Määritelmän 6.1. mukaan piste (x_0, y_0) on annetun autonomisen systeemin kriittinen piste jos $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Tehtävänannon yhtälöparin ylemmästä yhtälöstä nähdään että tämä toteutuu vain jos $x = 0$, ja tällöin jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan välittömästi että myös $y = 0$. Autonomisen systeemin kriittinen piste on siis $(0, 0)$.

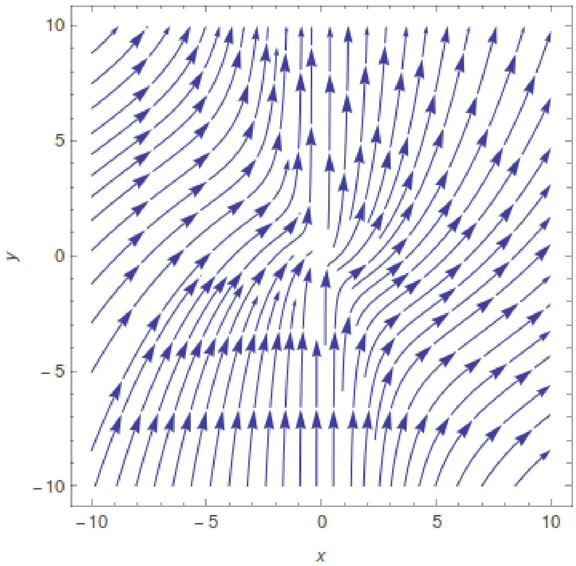
Ratkaistaan autonomisen systeemin radat luentomonisteen kaavasta (6.2), siis

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x},$$

joka on esimerkiksi kurssilta Differentiaaliyhtälöt I tuttu tasa-asteinen differentiaaliyhtälö, joka saadaan aina separoituvaksi yhtälöksi sijoituksella $z = y/x$, $y' = z'x + z$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} =& 1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow \\
z'x + z =& 1 + z^2 + z \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}(1+z^2) \Leftrightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \\
\arctan z =& \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \\
z =& \tan(\ln|x| + C), \text{sijoitetaan takaisin} y = zx : \\
y =& x \tan(\ln|x| + C)
\end{aligned}$$

Tämä täyttää tehtävänannon, mutta hahmotellaan vielä koneellisesti ratakäyrät:



7. a) Etsi systeemin

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä.

b) Määrää neljä ensimmäistä Picardin iteraation termiä alkuarvo-ongelmalle

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[Picardin iteraation termit määrätään systeemeille samalla tavalla kuin yhtälöiden tapauksessa – nyt iteraation termit ovat vain vektoriarvoisia funktioita.]

Ratkaisu: Olkoon $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, jolloin systeemi saa muodon $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$.

a) Matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - (0+0+0) = (1-\lambda)^3,$$

jolla on yksi kolminkertainen juuri $\lambda = 1$. Lasketaan tästä syystä suoraan kolmas potenssi $(A - \lambda I)^3$:

$$(A-\lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten matriisilla A on esimerkiksi yleistetyt ominaisvektorit $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Siten eräs perusjärjestelmä on $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ missä

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t + (A-\lambda I)^2\, t^2/2)\,\mathbf{u}_1 \\
&= e^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} \right) \mathbf{u}_1 \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}_2(t) &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t + (A-\lambda I)^2\, t^2/2)\,\mathbf{u}_2 \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ja} \\
\mathbf{x}_3(t) &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t + (A-\lambda I)^2\, t^2/2)\,\mathbf{u}_3 \\
&= e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Picardin iteraatiokaava on

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \mathbf{x}_n(t))\, dt,$$

missä tehtävän tilanteessa $f(t, \mathbf{x}(t)) = A\,\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $t_0 = 0$. Kaava saa siis muodon

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n(t)\, dt.$$

Sitten vain lasketaan:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\\
\mathbf{x}_1(t) &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} dt\\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \Big/_0^t \begin{bmatrix}2t\\2t\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2t+1\\2t+1\\t+1\end{bmatrix},\\
\mathbf{x}_2(t) &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t+1\\2t+1\\t+1\end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}4t+2\\3t+2\\t+1\end{bmatrix} dt\\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \Big/_0^t \begin{bmatrix}2t^2+2t\\\frac{3}{2}t^2+2t\\\frac{1}{2}t^2+t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2t^2+2t+1\\\frac{3}{2}t^2+2t+1\\\frac{1}{2}t^2+t+1\end{bmatrix},\\
\mathbf{x}_3(t) &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t^2+2t+1\\\frac{3}{2}t^2+2t+1\\\frac{1}{2}t^2+t+1\end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix}\frac{7}{2}t^2+4t+2\\2t^2+3t+1\\\frac{1}{2}t^2+t+1\end{bmatrix} dt\\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \Big/_0^t \begin{bmatrix}\frac{7}{6}t^3+2t^2+2t\\\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+t\\\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{6}t^3+2t^2+2t+1\\\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+t+1\\\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+1\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$