HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 4
Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 12. ja 21.4.2017.

1. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen matriisi (eli $A = A^T$). Näytä, että kaikki sen ominaisarvot ovat reaalisia.

   [Vihje: Kannattanee tarkastella oliota $\lambda\,(\overline{\mathbf{u}})^T\,\mathbf{u}$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ on ominaisarvo, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ sitä vastaava ominaisvektori ja $\overline{\mathbf{u}}$ kompleksikonjugaatti/liittoluku. (Kompleksiluku u_j voidaan kirjoittaa $u_j = u_j^1 + i\,u_j^2$, missä $u_j^1, u_j^2 \in \mathbb{R}$, ja $\overline{u}_j = u_j^1 - i\,u_j^2$. Nyt, kun $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$, niin $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)^T$.)]

2. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

3. Ratkaise
$$\begin{cases} x_1' = 6\,x_1 - 4\,x_2 \\ x_2' = 9\,x_1 - 6\,x_2 \end{cases}$$

4. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

5. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 13t \end{bmatrix}$$

   [Perusjärjestelmä löytyy harjoituksista 3.]

6. Ratkaise variointikeinolla alkuarvotehtävä
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   [Voit pitää luentomonisteen kaavaa (5.36) tunnettuna, kun etsit yksittäisratkaisua.]