HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 12. ja 21.4.2017.

1. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrinen matriisi (eli $A = A^T$). Näytä, että kaikki sen ominaisarvot ovat reaalisia.

   [Vihje: Kannattanee tarkastella oliota $\lambda\,(\overline{\mathbf{u}})^T\,\mathbf{u}$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ on ominaisarvo, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ sitä vastaava ominaisvektori ja $\overline{\mathbf{u}}$ kompleksikonjugaatti/liittoluku. (Kompleksiluku u_j voidaan kirjoittaa $u_j = u_j^1 + i\,u_j^2$, missä $u_j^1, u_j^2 \in \mathbb{R}$, ja $\overline{u}_j = u_j^1 - i\,u_j^2$. Nyt, kun $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$, niin $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n)^T$.)]

   Ratkaisu: Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ matriisin A ominaisarvo ja $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Kompleksiset ominaisarvot esiintyvät pareittain eli myös $\overline{\lambda}$ on ominaisarvo ja $\overline{\mathbf{u}}$ on sitä vastaava ominaisvektori (luennot). Tiedämme siis, että $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ ja $A\overline{\mathbf{u}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{u}}$. Symmetrisuuden perusteella $A^T = A$. Nyt

$$\lambda\,(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = (\overline{\mathbf{u}})^T\lambda\,\mathbf{u} = (\overline{\mathbf{u}})^T A\mathbf{u} = (A^T\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = (A\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = (\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = \overline{\lambda}\,(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u},$$

   joten

$$\lambda\,(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} - \overline{\lambda}\,(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = (\lambda - \overline{\lambda})(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = 0.$$

   Huomataan, että

$$(\overline{\mathbf{u}})^T\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \overline{u}_j\,u_j = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \neq 0,$$

   koska ominaisvektorina $\mathbf{u} \neq 0$, joten ainakin jokin komponenteista u_j on eri suuri kuin 0. Näin ollen

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0$$

   eli λ on reaaliluku.

2. Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   Ratkaisu: Ratkaistaan matriisin $\begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ominaisarvot yhtälöstä

$$\det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

   Yhtälön vasemmalle puolelle pätee

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} =& (9-\lambda)\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} - 4\det \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ =& (9-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-6)(3-\lambda) \\ =& (-9+\lambda-9\lambda+\lambda^2+24)(3-\lambda) \\ =& (\lambda^2-8\lambda+15)(3-\lambda) \\ =& (\lambda-3)(\lambda-5)(3-\lambda). \end{aligned}$$

Matriisilla on siis kaksi ominaisarvoa: $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 5$. Näistä ensimmäinen on karakteristisen polynomin kaksinkertainen juuri, joten sille saattaa löytyä kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Etsitään kutakin ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit.

($\lambda_1 = 3$) Ratkaistaan ominaisvektori $\mathbf{u}$ yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = 0.$$

Yhtälölle on kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua: $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

($\lambda_2 = 5$) Ratkaistaan ominaisvektori $\mathbf{v}$ yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0.$$

Kahden ensimmäisen rivin perusteella, $v_1 = -v_2$. Sijoittamalla tämä viimeiseen riviin, saamme

$$6v_1 - 4v_1 - 2v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = v_1.$$

Ominaisarvoa λ_2 vastaavaksi ominaisvektoriksi voidaan siis valita esimerkiksi $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ominaisvektoriesta ja niitä vastaavista ominaisarvoista saamme differentiaaliyhtälölle perusjärjestelmän:

$$\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{u_1}, e^{\lambda_1 t}\mathbf{u_2}, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}\right) = \left(e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Yhtälön yleinen ratkaisu saadaan perusjärjestelmän funktioiden lineaarikombinaationa.

3. Ratkaise

$$\begin{cases} x_1' = 6\,x_1 - 4\,x_2 \\ x_2' = 9\,x_1 - 6\,x_2 \end{cases}$$

Ratkaisu: Yhtälö on matriisimuodossa

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Kerroinmatriisin A karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-6-\lambda) - 9 \cdot (-4) = \ldots = \lambda^2,$$

jolla on kaksoisjuuri $\lambda = 0$, joka on siten matriisin A ainoa ominaisarvo. Etsitään sitä vastaavat ominaisvektorit: ne toteuttavat yhtälön

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-0 & -4 \\ 9 & -6-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6u_1 - 4u_2 \\ 9u_1 - 6u_2 \end{bmatrix},$$

eli komponentit u_1 ja u_2 toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 6u_1 - 4u_2 = 2(3u_1 - 2u_2) = 0 \\ 9u_1 - 6u_2 = 3(3u_1 - 2u_2) = 0 \end{cases},$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{cases} u_1 = 2t \\ u_2 = 3t \end{cases},$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Matriisilla ei siis ole tarpeeksi lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, joten on tarve hakea yleistettyjä ominaisvektoreita. Matriisin $A - \lambda I$ toinen potenssi on

$$(A - 0I)^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten yhtälön $(A - 0I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ toteuttavat muun muassa vektorit $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Siten kurssimateriaalin kaavan (5.32) nojalla systeemin eräs perusjärjestelmä on $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{0t}(I + (A - 0I)t)\mathbf{u}_1 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t & -4t \\ 9t & -6t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6t + 1 & -4t \\ 9t & -6t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6t + 1 \\ 9t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= e^{0t}(I + (A - 0I)t)\mathbf{u}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 6t + 1 & -4t \\ 9t & -6t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4t \\ -6t + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ja täysi ratkaisu on $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x_2}$, missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Huomio: Perusjärjestelmään käytettäväksi olisi voinut myös valita ominaisvektorin $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ ja vain toisen yleistetyistä ominaisvektoreista. Siihen voi valita minkä tahansa yhdistelmän ominaisvektoreita ja yleistettyjä ominaisvektoreita, kunhan ne ovat lineaarisesti riippumattomia.

Sivuhuomio: Koska $A^2 = (A - 0I)^2$ on nollamatriisi, on matriisieksponentiaalin laskeminen suoraan auki helpompaa, sillä toisen ja korkeamman asteen termit katoavat.

Systeemin ratkaisu on yksinkertaisesti

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right)\mathbf{c} \\
&= (I + At + 0 + \cdots)\mathbf{c} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t & -4t \\ 9t & -6t \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6t+1 & -4t \\ 9t & -6t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Huomaa, että yhtään yleistettyä tai tavallista ominaisvektoria ei tarvinnut laskea.

4. Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

Ratkaisu: Merkitään kerroinmatriisia A:lla. Sen karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 6 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-10-\lambda) - 6\cdot(-6) = \ldots = (\lambda+4)^2,$$

jolla on kaksinkertainen juuri $\lambda = -4$, joka on siten matriisin A ainoa ominaisarvo. Etsitään sitä vastaavat ominaisvektorit: ne toteuttavat yhtälön

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-4) & -6 \\ 6 & -10-(-4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6u_1 - 6u_2 \\ 6u_1 - 6u_2 \end{bmatrix},$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{cases} u_1 = t \\ u_2 = t \end{cases},$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Matriisilla ei siis ole tarpeeksi lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, joten on taas tarve hakea yleistettyjä ominaisvektoreita. Matriisin $A - \lambda I$ toinen potenssi on

$$(A-(-4)I)^2 = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten yhtälön $(A-(-4)I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ toteuttavat muun muassa vektorit $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Siten erään perusjärjestelmän $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ muodostavat funktiot

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= e^{-4t}(I + (A-(-4)I)t)\mathbf{u}_1 \\
&= e^{-4t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t & -6t \\ 6t & -6t \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e^{-4t}\begin{bmatrix} 6t+1 & -6t \\ 6t & -6t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e^{-4t}\begin{bmatrix} 6t+1 \\ 6t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(t) &= e^{-4t}(I + (A - (-4)I)t)\mathbf{u}_2 \\
&= e^{-4t}\begin{bmatrix} 6t+1 & -6t \\ 6t & -6t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{-4t}\begin{bmatrix} -6t \\ -6t+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ja täysi ratkaisu on $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$, missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Huomio: Kuten aiemmin, perusjärjestelmään olisi voinut käyttää myös aiemmin löydettyä tavallista ominaisvektoria $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Sivuhuomio: Koska $(A - (-4)I)^2$ on nollamatriisi, voi tässäkin tehtävässä välttää ominaisvektorien etsinnän laskemalla matriisieksponentiaalin auki (se tosin täytyy kirjoittaa hieman eri muodossa).

Systeemin ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{c} \\
&= e^{(-4)It + (A-(-4)I)t}\mathbf{c} \\
&= e^{-4It}e^{(A-(-4)I)t}\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4t)^k}{k!} I^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - (-4)I)^k\right)\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4t)^k}{k!} I\right)(I + (A - (-4)I)t + 0 + \dots)\,\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4t)^k}{k!}\right) I \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t & -6t \\ 6t & -6t \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&= e^{-4t}\begin{bmatrix} 6t+1 & -6t \\ 6t & -6t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Taaskin vältyttiin laskemasta yhtään ominaisvektoria: käytännössä tarvitsee vain laskea sarja $e^{(A-\lambda I)t}$, joka katkeaa äärellisen pituiseksi, jos jokin potenssi $(A - \lambda I)^n$ on nollamatriisi.

5. Ratkaise

$$
\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 13t \end{bmatrix}
$$

[Perusjärjestelmä löytyy harjoituksista 3.]

Ratkaisu: Harjoitusten 3. mukaan yhtälöä vastaavan homogeeniyhtälön perusjärjestelmän muodostavat seuraavat funktiot:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_+(t) &= e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 2t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}_-(t) &= e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos 2t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tällöin homogeeniyhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$
\mathbf{x}(t) = c_+\mathbf{x}_+(t) + c_-\mathbf{x}_-(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} c_+\cos 2t + c_-\sin 2t \\ c_-\cos 2t - c_+\sin 2t \end{bmatrix},
$$

missä $c_+, c_- \in \mathbb{R}$.

Etsitään seuraavaksi epähomogeeniyhtälölle yksittäisratkaisu lineaarisella yritteellä $\mathbf{x_p}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$, missä $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $\mathbf{x_p}'(t) = \mathbf{a}$, jolloin saamme alkuperäiseen yhtälöön sijoittamalla:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} (\mathbf{a}t + \mathbf{b}) + \begin{bmatrix} 4 \\ 13t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 13t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3(a_1 t + b_1) + 2(a_2 t + b_2) \\ -2(a_1 t + b_1) + 3(a_2 t + b_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 13t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (3a_1 + 2a_2)t + (3b_1 + 2b_2 + 4) \\ (-2a_1 + 3a_2 + 13)t + (-2b_1 + 3b_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Koska $\mathbf{a}$ ei riipu muuttujasta t, tulee päteä

$$
\begin{cases} 3a_1 + 2a_2 = 0 \\ -2a_1 + 3a_2 + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{2}{3}a_2 \\ \frac{13}{3}a_2 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \end{cases}
$$

Tästä saamme vakion $\mathbf{b}$ termeille yhtälöparin:

$$
\begin{cases} 3b_1 + 2b_2 + 4 = a_1 = 2 \\ -2b_1 + 3b_2 = a_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b_1 + 2b_2 = -2 \\ b_2 = -1 + \frac{2}{3}b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -1 \end{cases}
$$

Siis yksittäisratkaisu on $\mathbf{x_p}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siten muotoa

$$
\mathbf{x}(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} c_+ \cos 2t + c_- \sin 2t \\ c_- \cos 2t - c_+ \sin 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},
$$

missä edelleen $c_+, c_- \in \mathbb{R}$.

6. Ratkaise variointikeinolla alkuarvotehtävä

$$
\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

[Voit pitää luentomonisteen kaavaa (5.36) tunnettuna, kun etsit yksittäisratkaisua.]

Ratkaisu: Ratkaistaan systeemi variointikeinolla käyttämällä luentomonisteen kaavaa (5.36), johon tarvitaan vastaavan homogenisen systeemin perusmatriisi, sekä sen käänteismatriisi. Vastaavan homogeenisen systeemin $\mathbf{x}(t)' = A\mathbf{x}(t)$ perusmatriisi (A:n ominaisarvo-vektoriparit ovat $(-2, [-1, 3]^T), (5, [2, 1]^T)$) on

$$
\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}
$$

ja koska tunnetusti 2x2-matriisille $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ käänteismatriisi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, niin tätä soveltamalla

$$
\mathbf{X}(t)^{-1} = \frac{1}{-e^{-2t}e^{5t} - 2e^{5t}3e^{-2t}} \begin{bmatrix} e^{5t} & -2e^{5t} \\ -3^{-2t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ -3e^{5t} & -e^{-5t} \end{bmatrix}
$$

Lasketaan kaavasta (5.36) ensin

$$
\begin{aligned}
\int \mathbf{X}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt =& \int -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{2t} & -2e^{2t} \\ -3e^{-5t} & -e^{5t} \end{bmatrix} \cdot -1 \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}dt \\
=& \frac{1}{7}\int \begin{bmatrix} 15e^{2t} - 8e^{2t} \\ -45e^{-5t} - 4e^{-5t} \end{bmatrix} te^{-2t}dt = \int \begin{bmatrix} t \\ -7te^{-7t} \end{bmatrix} dt \\
=& \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{1}{7}e^{-7t}(7t+1) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

jolloin kaavaan (5.36) sijoittamalla

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_p(t) =& \mathbf{X}(t)\int \mathbf{X}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt \\
=& \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{1}{7}e^{-7t}(7t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2}e^{-2t} + \frac{2}{7}e^{-2t}(7t+1) \\ \frac{3}{2}t^2e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{-2t}(7t+1) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

jolloin siis epähomogeenisen DY-systeemin yleinen ratkaisu on lauseen 5.17. perusteella

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) =& \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t) \\
=& \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} + 2t + \frac{2}{7} \\ \frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{7} \end{bmatrix} e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Kiinnitetään seuraavaksi alkuarvotehtävää varten vakiot c_1, c_2:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =& \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} -c_1 + 2c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/7 \\ 1/7 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

josta saadaan lineaarinen yhtälöryhmä:

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47/7 \\ 20/7, \end{bmatrix}
$$

jonka ratkaisuksi $c_1 = -1/7, c_2 = 23/7$. Tällöin systeemin alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) =& \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 2e^{5t} \\ 3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/7 \\ 23/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} + 2t + \frac{2}{7} \\ \frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{7} \end{bmatrix} e^{-2t} \\
=& \begin{bmatrix} e^{-2t}(\frac{3}{7} + 2t - \frac{1}{2}t^2) + \frac{46}{7}e^{5t} \\ e^{-2t}(-\frac{2}{7} + t + \frac{3}{2}t^2) + \frac{23}{7}e^{5t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$