HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 3
Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 5. ja 7.4.2017.

Vapaaehtoiset lämmittelytehtävät

Näitä ei ole tarkoitus käydä laskuharjoituksissa lävitse. Tarkoitus on laskea, kunnes saa oikean vastauksen (vastaukset sivulla 2).
Etsi seuraavien matriisien ominaisarvot ja vektorit:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtäväsarja I

Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälösysteemit kirjoittamalla ne matriisimuodossa

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

ja käyttämällä niin sanottua matriisikeinoa (eli ominaisarvoja ja ominaisvektoreita).

1. Ratkaise

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \sqrt{2}\,x_2 \\ x_2' = 2\,x_2 \end{cases}$$

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x_1' = 3\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' = -2\,x_1 + 3\,x_2 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Ratkaise

$$\begin{cases} x_1' = 8\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' = 4\,x_1 + x_2 \end{cases}$$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x_1' = 2\,x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ x_3' = -x_2 + 2\,x_3 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehtäväsarja II

5. Olkoon $y : (-1,1) \to \mathbb{R}$ seuraavan alkuarvotehtävän ratkaisu

$$y''(x) + q(x)\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) \neq 0,$$

missä q on jatkuva ja $q(x) < 0$, kun $x \in (-1,1)$.
Näytä, ettei ratkaisulla y ole muita nollakohtia kuin origo välillä $(-1,1)$.

6. Tutkitaan (kahden pisteen) *reuna-arvotehtävää*

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \qquad y(0) = 0 \quad \text{ja} \quad y(L) = 0,$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on vakio ja $L \neq 0$.

Edellistä tehtävää kutsutaan reuna-arvotehtäväksi, koska ratkaisulle määrätään käytös kahdessa eri pisteessä ($x = 0$ ja $x = L$). Tämä poikkeaa alkuarvotehtävästä, jossa käytös määrätään vain yhdessä pisteessä.

Eräs reuna-arvotehtävän ratkaisu on $y \equiv 0$. Millä vakion λ arvoilla tehtävällä on myös muita ratkaisuja?

Lämmittelytehtävien ominaisarvot ja -vektorit

a) $\lambda = 1, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 4, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\lambda = 4, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\lambda = -2, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = -1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$