HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 5. ja 7.4.2017.

Tehtäväsarja I

Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälösysteemit kirjoittamalla ne matriisimuodossa

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t)$$

ja käyttämällä niin sanottua matriisikeinoa (eli ominaisarvoja ja ominaisvektoreita).

1. Ratkaise

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \sqrt{2}\,x_2 \\ x_2' = 2\,x_2 \end{cases}$$

Ratkaisu: Yhtälön voi esittää matriisimuodossa:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Ratkaistaan ensin matriisin $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot yhtälöstä

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Determinantiksi saamme

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda),$$

jonka juuret ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$. Näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit, $\mathbf{u}^1 = (u_1^1, u_2^1)$ ja $\mathbf{u}^2 = (u_1^2, u_2^2)$, saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_k & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix} = 0$$

arvoille $k = 1$ ja $k = 2$. Laskemalla matriisitulo, saamme seuraavan yhtälöparin ominaisvektorin $\mathbf{u}^k$ komponenteille:

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)u_1^k + \sqrt{2}u_2^k &= 0 \\ (2-\lambda_k)u_2^k &= 0. \end{cases}$$

Sijoittamalla ominaisarvot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$, saamme seuraavat yhtälöparit:

$$\begin{cases} \sqrt{2}u_2^1 &= 0 \\ u_2^1 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_1^2 + \sqrt{2}u_2^2 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{cases}$$

Yltä voimme ratkaista ominaisvektoreiden komponentit

$$\begin{cases} u_1^1 &= c_1 \\ u_2^1 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1^2 &= \sqrt{2}u_2^2 \\ u_2^2 &= c_2. \end{cases}$$

Valitsemalla $c_1 = c_2 = 1$, saadaan ominaisvektoreiksi:

$$\mathbf{u}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja } \mathbf{u}^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lauseen 5.12 mukaan yhtälön perusjärjestelmän muodostaa

$$(e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}^2) = \left(e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Näin ollen yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t + \sqrt{2} C_2 e^{2t} \\ C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x_1' = 3\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' = -2\,x_1 + 3\,x_2 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Yhtälö on matriisimuodossa

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) =: A\,\mathbf{x}(t),$$

missä siis kerroinmatriisia merkitään A:lla. Matriisin karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-2)\cdot 2 = (\lambda - 3)^2 + 4,$$

ja sen nollakohdat ovat $\lambda_+, \lambda_- = 3 \pm 2i =: \alpha \pm \beta i$.
Ominaisarvoa $\lambda_+ = 3 + 2i$ vastaavat ominaisvektorit toteuttavat yhtälön

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-(3+2i) & 2 \\ -2 & 3-(3+2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

eli komponentit toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} -2ix + 2y = 0 \\ -2x - 2iy = 0. \end{cases}$$

Koska kertomalla alempi yhtälö i:llä saadaan ylempi yhtälö, riittää toteuttaa vain yhtälö $-2ix + 2y = 0$. Valitsemalla $x = 1$ saadaan $y = i$, joten ominaisarvolle $\lambda_+ = 3 + 2i$ löydettiin ominaisvektori

$$\mathbf{u}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: \mathbf{a} + i\,\mathbf{b}.$$

(Tästä seuraa, että ominaisarvolla $\lambda_- = 3 - 2i$ on ominaisvektori

$$\mathbf{u}_- := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{a} - i\,\mathbf{b}.$$

joka on siis ominaisarvon λ_+ ominaisvektorin $\mathbf{u}_+$ kompleksikonjugaatti.

Parille kompleksikonjugoituja ominaisarvoja riittää aina löytää ominaisvektori vain yhdelle, jota konjugoimalla saadaan ominaisvektori toiselle.)

Nyt Lauseen 5.15 nojalla tehtävän homogeenisysteemillä on perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-)$, missä $\mathbf{x}_+(t) := e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t)$ ja $\mathbf{x}_-(t) := e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)$, eli

$$\mathbf{x}_+(t) = e^{3t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cos 2t - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\sin 2t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 2t\\ -\sin 2t\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_-(t) = e^{3t}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\sin 2t + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cos 2t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix}\sin 2t\\ \cos 2t\end{bmatrix},$$

ja täysi ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = c_+\mathbf{x}_+(t) + c_-\mathbf{x}_-(t) = e^{3t}\begin{bmatrix}c_+\cos 2t + c_-\sin 2t\\ c_-\cos 2t - c_+\sin 2t\end{bmatrix},$$

missä $c_+, c_- \in \mathbb{R}$. Ratkotaan vielä alkuarvotehtävän kertoimet: alkuarvoehdosta saadaan

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = e^{3\cdot 0}\begin{bmatrix}c_+\cos(2\cdot 0) + c_-\sin(2\cdot 0)\\ c_-\cos(2\cdot 0) - c_+\sin(2\cdot 0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_+\\ c_-\end{bmatrix},$$

eli $c_+ = c_- = 1$, ja etsitty yksittäisratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 2t + \sin 2t\\ \cos 2t - \sin 2t\end{bmatrix}.$$

(Merkinnät $x := c$ ja $c =: x$ tarkoittavat "x:n määritellään olevan c".)

3. Ratkaise

$$\begin{cases} x_1' = 8\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' = 4\,x_1 + x_2 \end{cases}$$

Ratkaisu: Annettu yhtälöpari on matriisimuodosssa $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},$$

jossa matriisin ominaisarvot saadaan yhtälöstä $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{bmatrix}8-\lambda & 2\\ 4 & 1-\lambda\end{bmatrix} = 0.$$

Matriisin A ominaisarvojen karakteristinen polynomi on $\lambda^2 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 9) = 0$, josta $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9$. Määritetään näitä vastaavat ominaisvektorit ominaisvektoriyhtälöstä $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}8 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = 0$$

joten $\vec{u} = s\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Vastaavasti ominaisvektori ominaisarvolle $\lambda_2 = 9$:

$$(A - \lambda_2)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}8-9 & 2\\4 & 1-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = 0$$

joten $\vec{v} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Tällöin lauseen 5.12 nojalla systeemillä on perusjärjestelmä: $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t} \right)$, tai vektorimuodossa $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x_1' = 2\,x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ x_3' = -x_2 + 2\,x_3 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Annettu differentiaaliyhtälöryhmä on matriisimuodosssa $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

jossa matriisin ominaisarvot saadaan yhtälöstä $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Laskemalla determinantti auki saadaan karakteristiseksi polynomiksi $(2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2) = 0$, josta $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2 - \sqrt{2},\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$. Määritetään näitä vastaavat ominaisvektorit yhtälöstä $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Ominaisarvolle $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1)\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0,$$

josta $-u_2 = 0$ ja $-u_1 - u_3 = 0 \Leftrightarrow -u_1 = u_3$ jolloin ominaisvektori $\vec{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$. Ominaisvektori ominaisarvolle $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$:

$$(A - \lambda_2)\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2+\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2-2+\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2-2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0,$$

josta $\sqrt{2}v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}v_1 = v_2$, ja $-v_2 + \sqrt{2}v_3 = 0$, jolloin $v_2 = \sqrt{2}v_3 = \sqrt{2}v_1$, eli ominaisvektori $\vec{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

Vastaavasti ominaisvektori ominaisarvolle $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$:

$$(A - \lambda_2)\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2-\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2-2-\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2-2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0,$$

josta $-\sqrt{2}w_1 - w_2 = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}w_1 = w_2$ ja $-w_2 - \sqrt{2}w_3 = 0 \Leftrightarrow w_2 = -\sqrt{2}w_3$ jolloin $-\sqrt{2}w_1 = w_2 = -\sqrt{2}w_3$ eli ominaisvektori $\vec{w} = r \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$.

Edellä ratkaistuista saadaan lauseen 5.12 nojalla DY-systeemin perusjärjestelmä, joka on vektorimuodossa

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{(2-\sqrt{2})t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{(2+\sqrt{2})t}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Kiinnitetään vakiot c_1, c_2, c_3 alkuarvotehtävälle

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

josta sopivalla ratkaisumenetelmällä (esimerkiksi yhtälöä tarkastelemalla tai varman päälle laskettaessa Gauss-Jordan) saadaan $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -1$, jolloin alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{(2+\sqrt{2})t}$$

Tehtäväsarja II

5. Olkoon $y : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ seuraavan alkuarvotehtävän ratkaisu

$$y''(x) + q(x)\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) \neq 0,$$

missä q on jatkuva ja $q(x) < 0$, kun $x \in (-1, 1)$.

Näytä, ettei ratkaisulla y ole muita nollakohtia kuin origo välillä $(-1, 1)$.

Ratkaisu: Tarkastellaan y:n käytöstä, kun $x > 0$ (tapaus $x < 0$ kulkee vastaavasti). Koska $y'(0) \neq 0$, niin joko $y'(0) > 0$ tai $y'(0) < 0$. Oletetaan, että $y'(0) > 0$, toinen tapaus kulkee vastaavasti.

Koska y toteuttaa tehtävän differentiaaliyhtälön, se on kahdesti derivoituva, joten y ja y' ovat jatkuvia ja derivoituvia. Koska $y'(0) > 0$, on olemassa sellainen $\delta_+ > 0$, että $y(x) > 0$, kun $x \in (0, \delta_+)$.

Tehdään vastaoletus: y:llä on olemassa positiivinen nollakohta. Olkoon x_1 pienin mahdollisista nollakohdista*. Tällöin y ei vaihda merkkiä välillä $(0, x_1)$, ja koska $y > 0$ lähellä nollaa, niin $y > 0$ koko välillä $(0, x_1)$.

Nyt y saa saman arvon kahdessa pisteessä, $y(0) = 0$ ja $y(x_1) = 0$. Väliarvolauseen (tai Rollen lauseen) mukaan löytyy sellainen $\xi \in (0, x_1)$, että $y'(\xi) = 0$. Koska $y''(x) = -q(x)y(x)$ ja $-q(x) > 0$ kaikkialla ja $y(x) > 0$ välillä $(0, x_1)$, niin nähdään, että myös $y''(x) > 0$ välillä $(0, x_1)$. Erityisesti $y''(\xi) > 0$ eli ξ on funktion y lokaali minimi.

Koska $y'' > 0$ koko välillä $(0, x_1)$, y' on aidosti kasvava välillä $(0, x_1)$, ja koska $y'(0) > 0$, niin $y' > 0$ välillä $(0, x_1)$. Tästä voidaan päätellä vielä, että myös y on aidosti kasvava välillä $(0, x_1)$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että ξ on funktion y lokaali minimi. $\square$

*) Voisi olla, että y:llä on äärettömän monta positiivista nollakohtaa, jotka olisivat esimerkiksi muotoa $\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, jolloin niistä ei voi valita pienintä.

Voidaan kuitenkin osoittaa, että koska y on jatkuva, niin nollakohtien infimum on myös nollakohta, ja koska $y > 0$ välillä $(0, \delta_+)$, niin infimum ei ole 0, eli pienin positiivinen nollakohta voidaan aina valita.

(Jos todistus ei ole muistissa, se on hyvä todistaa: vinkkiä saa esimerkiksi katsomalla Bolzanon lauseen todistusta...)

6. Tutkitaan (kahden pisteen) *reuna-arvotehtävää*

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \qquad y(0) = 0 \quad \text{ja} \quad y(L) = 0,$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on vakio ja $L \neq 0$.

Edellistä tehtävää kutsutaan reuna-arvotehtäväksi, koska ratkaisulle määrätään käytös kahdessa eri pisteessä ($x = 0$ ja $x = L$). Tämä poikkeaa alkuarvotehtävästä, jossa käytös määrätään vain yhdessä pisteessä.

Eräs reuna-arvotehtävän ratkaisu on $y \equiv 0$. Millä vakion λ arvoilla tehtävällä on myös muita ratkaisuja?

Ratkaisu: Annetun lineaarisen toisen kertaluokan homogeeniyhtälön karakteristinen polynomi on $r^2 + \lambda$. Tällä on juuret, $r = \pm\sqrt{-\lambda}$. Juurten luonteen määrää λ:n merkki, joten tehdään tarkastelu tapauksittain:

$\lambda < 0$: Mikäli korvaamme edellisessä tehtävässä negatiivisen funktion q vakiolla λ ja laajennamme määrittelyvälin $(-1, 1)$ koko reaaliakseliksi, saamme seuraavan tuloksen: Jos $y(0) = 0$ ja $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joko $y \equiv 0$, tai ratkaisulla y on vain yksi nollakohta, $x = 0$.

Saman tuloksen saamme myös tarkastelemalla yhtälön karakteristista polynomia, $r^2 + \lambda = 0$. Karakteristisen polynomin juuret ovat reaalisia, ja siten lauseen 3.11. mukaan yhtälöllä on perusjärjestelmä $(e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x})$. Näin ollen yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Ratkaistaan seuraavaksi vakioiden C_1 ja C_2 arvot reuna-arvoista. Ensimmäisen reuna-arvon mukaan: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$. Sijoittamalla tämä yleiseen ratkaisuun, saamme

$$y(x) = C_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right).$$

Toisen ehdon mukaan, $y(L) = 0$. Koska emme etsi triviaaliratkaisua, oletetaan, että $C_1 \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} & y(L) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & e^{\sqrt{-\lambda}L} = e^{-\sqrt{-\lambda}L} \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{-\lambda}L = -\sqrt{-\lambda}L \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda = 0. \end{aligned}$$

Tällöin saatava ratkaisu on $y(x) \equiv 0$. Yhtälöllä ei siis ole muita ratkaisuja arvoilla $\lambda < 0$.

$\lambda = 0$: Karakteristisella polynomilla on tällöin kaksoisjuuri $r = 0$, ja perusjärjestelmä on $(e^{0x}, xe^{0x}) = (1, x)$, ja kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y = C_1 + C_2 x.$$

Sijoittamalla reunaehto $y(0) = 0$ saadaan $C_1 = 0$, ja reunaehdosta $y(L) = 0$ saadaan $C_2 L = 0$. Koska $L \neq 0$, niin myös $C_2 = 0$ ja saatu ratkaisu on vakiofunktio $y \equiv 0$.

Yhtälöllä ei ole siis muita ratkaisuja, kun $\lambda = 0$.

$\lambda > 0$: Tällöin karakteristisen polynomin juuret ovat $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ ja lauseen 3.13. mukaan yhtälöllä on perusjärjestelmä $(\sin(\sqrt{\lambda}x), \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Nyt kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Reuna-arvosta $y(0) = 0$ saamme $C_2 = 0$. Sijoittamalla tämä ratkaisuun, toinen reuna-arvo antaa meille

$$0 = y(L) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}L).$$

Oletetaan, että $C_1 \neq 0$. Tällöin yllä oleva yhtälö toteutuu, kun $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, jollain $n \in \mathbb{Z}$ (mutta koska $\lambda \neq 0$, niin täytyy olla $n \neq 0$). Toisin sanoen yhtälöllä on triviaaliratkaisusta $y \equiv 0$ poikkeava ratkaisu

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

kun

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$