HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 2
Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 29. ja 31.3.2017.

1. Palauta seuraavat differentiaaliyhtälöt ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisiksi systeemeiksi.

$$\text{a)}\quad y'' + q(x)y = r(x) \qquad \text{b)}\quad y^{(4)} + 2xy^{(2)} + x^2y = 1$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'\,y'' = a, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

3. a) Millä r:n arvoilla e^{rx} ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 0?$$

   b) Mitä muotoa differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut ovat?

4. Ratkaise

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

5. a) Olkoon $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ (jatkuvasti) derivoituvia funktioita, joilla ei ole samoja nollakohtia. Oletetaan, että x_1 ja x_2 ovat funktion y_1 kaksi peräkkäistä nollakohtaa. Siis $y_1(x_1) = 0 = y_1(x_2)$, $x_1 < x_2$ ja $y_1(x) \neq 0$, kun $x \in (x_1, x_2)$.

   Jos funktiolla y_2 ei ole nollakohtia välillä (x_1, x_2), voiko Wronskin determinantti $W(y_1, y_2)(x)$ saada arvoa 0, kun $x \in (x_1, x_2)$?

   b) Tutkitaan toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ja oletetaan edelleen, että x_1 ja x_2 ovat funktion y_1 kaksi peräkkäistä nollakohtaa. Jos $(y_1(x), y_2(x))$ muodostaa perusjärjestelmän, kuinka monta nollakohtaa funktiolla y_2 voi olla välillä $[x_1, x_2]$?

6. Oletetaan, että $f(x,y) : D \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja jatkuva sekä tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

   Olkoon $(x_0, y_0) \in D$ ja $\phi_1, \phi_2 : I \to K$ jatkuvia kuvauksia. Edellä $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ ja $K = [y_0 - k, y_0 + k]$, missä $h > 0$, $k > 0$, ja $I \times K \subset D$. Määritellään

$$F(\phi_i)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_i(t))\,dt, \qquad i = 1, 2.$$

   a) Näytä, että voit valita h:n siten, että

$$|F(\phi_1)(x) - F(\phi_2)(x)| \leq q \left(\sup_{x \in I} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right), \qquad q < 1,$$

   ja

$$|F(\phi_1)(x) - y_0| \leq k.$$

KÄÄNNÄ!

b) Edellä a)-kohdassa näytetään, että F on niin sanottu kontraktio $X \to X$, missä

$$X = \left\{ \phi : I \to K \text{ jatkuva ja } \sup_{x \in I} |\phi(x) - y_0| \leq k \right\}$$

ja kahden X:n funktion ϕ_1, ϕ_2 etäisyyttä mitataan sup-normilla eli suureella $\sup_{x \in I} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$. Kyseisellä etäisyysmitalla X:stä tulee niin sanottu täydellinen avaruus.

Voit pitää edellä annettuja tietoja tunnettuna. Etsi/tutustu Topologia I:n Banachin kiintopistelauseeseen. Näytä sen avulla, että differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmalla

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu a)-kohdassa löydetyllä välillä $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.