HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 29. ja 31.3.2017.

1. Palauta seuraavat differentiaaliyhtälöt ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisiksi systeemeiksi.

$$\text{a)} \quad y'' + q(x)y = r(x) \qquad \text{b)} \quad y^{(4)} + 2xy^{(2)} + x^2 y = 1$$

Ratkaisu: Kuten kurssimateriaalin sivulla 63, nimetään jokainen y:n derivaatta omaksi muuttujakseen.

a) Differentiaalyhtälö on normaalimuodossaan $y'' = -qy + r$. Kun määritellään

$$\begin{aligned} z_0 &= y, \\ z_1 &= y' = z_0', \end{aligned}$$

niin differentiaaliyhtälöstä tulee lineaarinen yhtälö $z_1' = -qz_0 + r$ ja saadaan normaalimuotoinen ensimmäisen kertaluvun systeemi

$$\begin{cases} z_0' = z_1 \\ z_1' = -qz_0 + r. \end{cases}$$

b) Differentiaaliyhtälö on normaalimuodossaan $y^{(4)} = -2xy^{(2)} - x^2 y + 1$. Kun määritellään $z_n = y^{(n)}$ kaikilla $n \in \{0, \dots, 3\}$, saadaan normaalimuotoinen ensimmäisen kertaluvun systeemi

$$\begin{cases} z_0' = z_1 \\ z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = -2xz_2 - x^2 z_1 + 1. \end{cases}$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'\,y'' = a, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu: Koska yhtälössä ei esiinny kuin y:n derivaattoja, tehdään kertaluvun pudotus: sijoitus $y' = z$, $y'' = z'$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$zz' = a,$$

joka on separoituva yhtälö. Ratkaistaan se:

$$\begin{aligned} &z\,dz = a\,dx \Leftrightarrow \int z\,dz = \int a\,dx \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = ax + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &z = \sqrt{2ax + C},\ C = c_1, \end{aligned}$$

johon voidaan sijoittaa takaisin muunnos $y' = z$, ja ratkaista separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{2ax + C} \Leftrightarrow \int y'\,dy = \int \sqrt{2ax + C}\,dx \Leftrightarrow \\ y(x) &= \frac{1}{3a}\bigg(2ax + C\bigg)^{\frac{3}{2}} + D,\ C, D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. a) Millä r:n arvoilla e^{rx} ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 0?$$

b) Mitä muotoa differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut ovat?

Ratkaisu:

a) Sijoitetaan yhtälöön $y = e^{rx}$, sekä kyseisen funktion derivaatat, $y^{(n)} = r^n e^{rx}$:

$$\begin{aligned} & r^4 e^{rx} - 2r^2 e^{rx} + e^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (r^4 - 2r^2 + 1)e^{rx} = 0 && e^{rx} > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & r^4 - 2r^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Polynomin $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$ juuret ovat $r = 1$ ja $r = -1$.

b) Molemmat yllä löydetyistä parametrin r arvoista ovat kaksoisjuuria, joten kokeilemme (DYI-kurssin hengessä) muodostavatko seuraavat funktiot yhtälön perusjärjestelmän: $(e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x})$. Funktiot $y_1 = e^x$ ja $y_3 = e^{-x}$ ovat aiemman päättelyn nojalla yhtälön ratkaisuja. Funktion $y = xe^{rx}$ derivaatat ovat $y^{(n)} = r^n xe^{rx} + nr^{n-1}e^{rx}$. Ratkaistavaan differentiaaliyhtälöön sijoitettuna saamme

$$\begin{aligned} y^{(4)} - 2y^{(2)} + y &= r^4 xe^{rx} + 4r^3 e^{rx} - 2(r^2 xe^{rx} + 2re^{rx}) + xe^{rx} \\ &= xe^{rx}(r^4 - 2r^2 + 1) + e^{rx}(4r^3 - 4r) \\ &= 0, \quad \text{kun } r = \pm 1. \end{aligned}$$

Siispä tarjotut funktiot ovat differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Lasketaan seuraavaksi näiden functioiden Wronskin determinantti pisteessä $x = 0$.

$$W[e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}](0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 4 \neq 0.$$

Ratkaisut ovat siis toisistaan riippumattomia ja muodostavat siten perusjärjestelmän tehtävän differentiaaliyhtälölle. Yhtälön kaikki ratkaisut ovat siis muotoa

$$C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 e^{-x} + C_4 xe^{-x},$$

missä $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

4. Ratkaise

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu: Harjoituksissa 3 ratkaisemme matriisimuotoisia differentiaaliyhtälöitä matriisien ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla. Alla esitellyssä ratkaisumenetelmässä palautamme yhtälön toisen kertaluvun lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi.

Palautetaan yhtälö differentiaaliyhtälösysteemiksi laskemalla oikean puolen matriisitulo:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) + x_2(t) \\ -x_1(t) + x_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Yhtälöparin summana saadaan yhtälö (1a). Derivoimalla ensimmäinen yhtälö, saadaan (1b):

$$\begin{cases} x_1'(t) + x_2'(t) &= 2x_2(t) \qquad (1a) \\ x_1''(t) &= x_1'(t) + x_2'(t) \qquad (1b) \end{cases}$$

Yhdessä (1a) ja (1b) antavat $x_2(t) = \frac{1}{2}x_1''(t)$. Sijoittamalla tämä alkuperäisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön, saamme toisen kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön funktiolle x_1:

$$\frac{1}{2}x_1''(t) - x_1'(t) + x_1(t) = 0.$$

Tämän yhtälön karakteristisen polynomin, $\frac{1}{2}r^2 - r + 1 = 0$, juuret ovat $r_1 = 1 + i$ ja $r_2 = 1 - i$. Näistä juurista saamme yhtälölle perusjärjestelmän $(\sin(t)e^t, \cos(t)e^t)$. Funktion x_1 yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$x_1(t) = e^t(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)).$$

Tästä saamme funktiolle x_2 ratkaisun

$$\begin{aligned} x_2(t) = \frac{1}{2}x_1''(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(e^t(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) + e^t(C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t))\Big) \\ &= \frac{1}{2}e^t\left(2C_1 \cos(t) - 2C_2 \sin(t)\right) \\ &= e^t(C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)). \end{aligned}$$

Matriisimuotoon palautettuna ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \\ C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t) \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

5. a) Olkoon $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ (jatkuvasti) derivoituvia funktioita, joilla ei ole samoja nollakohtia. Oletetaan, että x_1 ja x_2 ovat funktion y_1 kaksi peräkkäistä nollakohtaa. Siis $y_1(x_1) = 0 = y_1(x_2)$, $x_1 < x_2$ ja $y_1(x) \neq 0$, kun $x \in (x_1, x_2)$.

   Jos funktiolla y_2 ei ole nollakohtia välillä (x_1, x_2), voiko Wronskin determinantti $W(y_1, y_2)(x)$ saada arvoa 0, kun $x \in (x_1, x_2)$?

   b) Tutkitaan toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ja oletetaan edelleen, että x_1 ja x_2 ovat funktion y_1 kaksi peräkkäistä nollakohtaa. Jos $(y_1(x), y_2(x))$ muodostaa perusjärjestelmän, kuinka monta nollakohtaa funktiolla y_2 voi olla välillä $[x_1, x_2]$?

Ratkaisu: Todetaan ensin täydellisyyden vuoksi että tehtävänanto kokonaisuudessaan pyytää todistamaan Sturmin separaatioteoreemana kulkevan hyvin perustavanlaatuisen tuloksen: toisen kertaluvun homogeenisen yhtälön perusjärjestelmän muodostavien ratkaisujen nollakohtien on vuoroteltava. Seuraavassa on eräs tapa todistaa tämä lause.

a) Oletetaan siis tehtävänannon mukaisesti että $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, ja muutoin kaikilla $x \in (x_1, x_2)$ pätee $y_1(x) \neq 0$ ja $y_2(x) \neq 0$, ja mukaillaan hieman opetusmonisteen kappaleen 3.4. (kertaluvun pudotus) johtoa Wronskille: määritellään hyödyllinen apufunktio

$$f(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)},$$

joka siis on välillä (x_1, x_2) jatkuva (sillä derivoituvat funktiot ovat jatkuvia), ja lisäksi $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Laskemalla osamäärän derivaatta selviää viimeistään miksi juuri tämä apufunktio oli hyvä valinta:

$$f'(x) = \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)}{y_2(x)^2} = \frac{-W(y_1, y_2)(x)}{y_2(x)^2} \tag{2}$$

ja koska $f(x_1) = f(x_2) = 0$, f on jatkuva suljetulla välillä $[x_1, x_2]$, ja myös derivoituva avoimella välillä (x_1, x_2), niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $a \in (x_1, x_2)$ siten, että $f'(a) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Yhtälöstä (2) nähdään tämän edellyttävän että $W(y_1, y_2)(a) = 0$ jollakin $a \in (x_1, x_2)$. Siis mikäli y_2:lla ei ole nollakohtia, Wronski katoaa varmasti välillä (x_1, x_2).

Tähän todistukseen ei tarvittu derivaattojen jatkuvuutta. Jatkuvuudesta on hyötyä, jos olettaa, että Wronskille pätee $W(y_1, y_2)(x) = y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x) \neq 0$, $x \in [x_1, x_2]$, ja tutkii Wronskin käytöstä. Derivaattojen jatkuvuuden perusteella $W(y_1, y_2)(x)$ on jatkuva kuvaus, joka ei saa arvoa 0, joten sen täytyy olla joko negatiivinen tai positiivinen koko välillä. Näytä: funktio y_2 saa sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja. Siis jatkuvuutensa perusteella myös arvon 0. Tämä on ristiriita, joten $W(y_1, y_2)(x)$ saa arvon 0 jossain pisteessä.

b) Osoitetaan seuraavaksi, että, jos $(y_1(x), y_2(x))$ muodostaa perusjärjestelmän, välillä $[x_1, x_2]$ funktiolla y_2 voi olla täsmälleen yksi nollakohta.

Oletetaan tehtävänantoon perustuen että $(y_1(x), y_2(x))$ on perusjärjestelmä välillä $[x_1, x_2]$ ja että edelleen $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ ja kaikilla $x \in (x_1, x_2)$ pätee $y_1(x) \neq 0$. Kumpikaan välin päätepisteistä ei voi olla y_2:n nollakohta, koska tällöin Wronski katoaa ja funktiopari ei olisi perusjärjestelmä. a)-kohdan todistuksen perusteella on selvää, että y_2:lla on oltava nollakohta avoimella välillä (x_1, x_2), muuten Wronski on 0 ja $(y_1(x), y_2(x))$ ei voi olla perusjärjestelmä.

Koska y_1 ja y_2 ovat symmetrisessä asemassa, nollakohtia on täsmälleen yksi. Tämän voi myös osoittaa vastaoletuksella: onkin olemassa y_2:n peräkkäiset nollakohdat a ja b, siten että $x_1 < a < b < x_2$. Toistamalla a)-kohdan päättely symmetrisesti y_1:n suhteen nähdään, että väliarvolauseen perusteella on oltava jokin $d \in (a, b)$ siten, että $y_1(d) = 0$. Tämä on ristiriita, sillä oletettiin, että y_1:llä ei ole nollakohtia välillä (x_1, x_2).

Perusjärjestelmän muodostavien ratkaisujen nollakohtien on siis vuoroteltava.

6. Oletetaan, että $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja jatkuva sekä tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

   Olkoon $(x_0, y_0) \in D$ ja $\phi_1, \phi_2 : I \to K$ jatkuvia kuvauksia. Edellä $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ ja $K = [y_0 - k, y_0 + k]$, missä $h > 0$, $k > 0$, ja $I \times K \subset D$. Määritellään

$$F(\phi_i)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_i(t))\, dt, \qquad i = 1, 2.$$

   a) Näytä, että voit valita h:n siten, että

$$|F(\phi_1)(x) - F(\phi_2)(x)| \leq q \left(\sup_{x \in I} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right), \qquad q < 1,$$

   ja

$$|F(\phi_1)(x) - y_0| \leq k.$$

b) Edellä a)-kohdassa näytetään, että F on niin sanottu kontraktio $X \to X$, missä

$$X = \left\{ \phi : I \to K \text{ jatkuva ja } \sup_{x \in I} |\phi(x) - y_0| \le k \right\}$$

ja kahden X:n funktion ϕ_1, ϕ_2 etäisyyttä mitataan sup-normilla eli suureella $\sup_{x \in I} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$. Kyseisellä etäisyysmitalla X:stä tulee niin sanottu täydellinen avaruus.

Voit pitää edellä annettuja tietoja tunnettuna. Etsi/tutustu Topologia I:n Banachin kiintopistelauseeseen. Näytä sen avulla, että differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmalla

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu a)-kohdassa löydetyllä välillä $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Ratkaisu:

a) Olkoon $M \ge 0$ funktiota f rajoittava vakio, eli $|f(x, y)| \le M$ kaikilla $(x, y) \in D$, ja olkoon $L \ge 0$ muuttujaa y vastaava Lipschitz-vakio, eli $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|$ kaikilla $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. Nyt saadaan ketju arvioita,

$$\begin{aligned}
&|F(\phi_1)(x) - F(\phi_2)(x)| \\
&= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))\, dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_2(t))\, dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))\, dt \right| \\
&\le \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))|\, dt && \text{(integraalin kolmioepäyhtälö)} \\
&\le \int_{x_0}^{x} L\, |\phi_1(t) - \phi_2(t)|\, dt && \text{(f on Lipschitz)} \\
&\le \int_{x_0}^{x} L \cdot \sup_{s \in I} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\, dt && \text{(supremumin määritelmä)} \\
&= L \cdot \sup_{s \in I} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \cdot (x - x_0) \\
&\le L \cdot \sup_{s \in I} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \cdot |x - x_0| \\
&\le L \cdot \sup_{s \in I} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \cdot h && (x \in [x_0 - h, x_0 + h]),
\end{aligned}$$

josta nähdään, että ehto

$$|F(\phi_1)(x) - F(\phi_2)(x)| \le q \cdot \sup_{s \in I} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \quad \text{jollakin } q < 1$$

pätee, kunhan $Lh < 1$, eli $h < 1/L$. Samoin, epäyhtälöketjusta

$$\begin{aligned}
&|F(\phi_1)(x) - y_0| \\
&= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))\, dt - y_0 \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))\, dt \right| \\
&\le \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t))|\, dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} M\, dt && \text{(f on rajoitettu)} \\
&= M(x - x_0) \\
&\le Mh
\end{aligned}$$

nähdään, että ehto

$$|F(\phi_1)(x) - y_0| \leq k$$

pätee, kunhan $Mh \leq k$, eli $h \leq k/M$. Voidaan siis valita $h = \min\{1/(2L), k/M\}$ ja halutut epäyhtälöt pätevät.

b) Banachin kiintopistelause on seuraava lause:

Jos (X, d) on täydellinen metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ on kontraktio, niin funktiolla f on yksikäsitteinen kiintopiste, eli on olemassa tasan yksi piste $x \in X$ jolle pätee $f(x) = x$.

Avaruus X sup-metriikalla ja funktio F toteuttavat Banachin kiintopistelauseen oletukset, joten on olemassa tasan yksi alkio $y \in X$ (eli $y\colon I \to K$ on uniikki jatkuva funktio) jolle pätee

$$y = F(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Koska y on jatkuva funktio ja f on jatkuva molempien muuttujiensa suhteen, ylläoleva integrandi on jatkuva, ja analyysin peruslauseen nojalla derivoimalla yhtälö puolittain saadaan $y' = f(x, y(x))$. Koska lisäksi pätee

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\, dt = y_0,$$

niin y on alkuarvo-ongelman yksikäsitteinen ratkaisu.