HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 1
Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 22. ja 24.3.2017.

1. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} y_1' = -\lambda_1\, y_1, & y_1(0) = y_0 \\ y_2' = \lambda_1\, y_1 - \lambda_2\, y_2, & y_2(0) = 0, \end{cases}$$
missä $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 > 0$ ovat vakioita. Etene seuraavasti
   a) Ratkaise y_1 ensimmäisestä differentiaaliyhtälöstä.
   b) Sijoita a)-kohdassa saatu y_1 toiseen yhtälöön ja ratkaise y_2.
   c) Anna esimerkki tilanteesta, jota differentiaaliyhtälösysteemillä voidaan mallintaa.

2. Ovatko seuraavat funktiot Lipschitz-jatkuvia reaaliakselilla?
$$\text{a)}\quad h(x) = x^2 \qquad \text{b)}\quad h(x) = x^{1/3} \qquad \text{c)}\quad h(x) = |x|$$

3. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä alkuarvo-ongelmalle
$$y' = -y, \qquad y(0) = 2,$$
ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

4. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä alkuarvo-ongelmalle
$$y' = \cos x, \qquad y(\pi) = 0.$$
Mitä huomaat? Kuinka selität havaintosi?

5. a) Toteuttaako funktio
$$f(x, y) = e^x \ln(1 + y^2)$$
lokaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen (Lause 4.4 luentomonisteessa) ehdot alueessa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, y \in \mathbb{R}\}$? Eli onko f jatkuva ja toteuttaako se lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta?
   b) Onko f tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen alueessa D?

   [Vihje: Jatkuvuuteen voit pitää tunnettuna, että jos $h(x)$ ja $g(y)$ ovat jatkuvia (ja h ei riipu muuttujasta y ja g ei riipu muuttujasta x), niin $(x, y) \mapsto h(x)\, g(y)$ on jatkuva.]

6. **Pakotettu vaimentamaton harmoninen värähtelijä** Differentiaaliyhtälöt I (kevät 2017) -kurssilla Harjoitusten 5 tehtävässä 6 tarkasteltiin harmonista värähtelijää, joka värähteli luonnollisella (kulma)taajuudellaan $\omega \neq 0$. Lisätään yhtälöön harmonista värähtelijää liikuttamaan sinimuotoinen voima, jonka amplitudi on $F_0 > 0$ ja taajuus $\alpha \neq \omega$, jolloin saadaan alkuarvotehtävä
$$y'' + \omega^2\, y = F_0 \sin(\alpha x), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$
   a) Ratkaise alkuarvotehtävä.
   b) 1. Määritä $\lim_{\alpha \to \omega} y(x)$. 2. Etsi jonot x_n^+ ja x_n^- siten, että x_n^+ ja x_n^- kasvavat rajatta ja $\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^+) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^-) = -\infty$. Tilannetta kutsutaan puhtaaksi resonanssiksi, ja sovelluksesta riippuen siitä on joko haittaa tai hyötyä.

   [Vinkki b)-kohtaan 1: L'Hôpital; 2. kohdan tilannetta voi tarkastella videosta: http://www.youtube.com/watch?v=BE827gwnnk4]