HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 22. ja 24.3.2017.

1. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälösysteemin alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y_1' = -\lambda_1\, y_1, & y_1(0) = y_0 \\ y_2' = \lambda_1\, y_1 - \lambda_2\, y_2, & y_2(0) = 0, \end{cases}$$

missä $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 > 0$ ovat vakioita. Etene seuraavasti

a) Ratkaise y_1 ensimmäisestä differentiaaliyhtälöstä.

b) Sijoita a)-kohdassa saatu y_1 toiseen yhtälöön ja ratkaise y_2.

c) Anna esimerkki tilanteesta, jota differentiaaliyhtälösysteemillä voidaan mallintaa.

Ratkaisu: a) Seurataan ohjetta ja ratkaistaan y_1 separoituvasta yhtälöstä (huomataan triviaaliratkaisu $y = 0$):

$$y_1' = -\lambda_1 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1'}{y_1} = -\lambda_1 \Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1} = \int -\lambda_1 dx \Leftrightarrow \ln|y_1| = -\lambda_1 x + c_1 \Leftrightarrow$$
$$|y_1| = e^{-\lambda_1 x + C_1} \Leftrightarrow y_1(x) = Ae^{-\lambda_1 x}, A = \pm e^{c_1}.$$

Kiinnitetään vielä A y_1:n alkuehdosta $y_1(0) = y_0 \Rightarrow A = y_0$. Joten a-kohdan ratkaisu on

$$y_1(x) = y_0 e^{-\lambda_1 x} \tag{1}$$

b) Sijoitetaan (1) yhtälöön $y_2' = \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2$, saadaan ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö:

$$y_2' = \lambda_1 y_0 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_2 y_2 \Leftrightarrow y_2' + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 y_0 e^{-\lambda_1 x},$$

jolla tunnetusti (kurssi Differentiaaliyhtälöt I) on integroiva tekijä $\mu(x) = e^{\lambda_2 x}$, joten ensimmäisen kertaluvun lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmää seuraamalla

$$\frac{d}{dx}(y_2 e^{\lambda_2 x}) = \lambda_1 y_0 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} \Leftrightarrow y_2 e^{\lambda_2 x} = \frac{\lambda_1 y_0}{-(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} + c_2 \Leftrightarrow$$
$$y_2(x) = \frac{\lambda_1 y_0}{-(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_1 x} + c_2 e^{-\lambda_2 x},$$

ja alkuehdosta $y_2(0) = 0$ saadaan

$$\frac{\lambda_1 y_0}{-(\lambda_1 - \lambda_2)} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

jolloin $y_2(x)$:n ratkaisu on

$$y_2(x) = \frac{\lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}) \tag{2}$$

Yhdistetään vielä yhtälöt (1) ja (2), jolloin systeemin ratkaisu on

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 e^{-\lambda_1 x} \\ y_2(x) = \frac{\lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}) \end{cases}$$

c) Sovelletaan esimerkiksi opetusmonisteen kohdassa 2.3.1 esiteltyä SIS-mallia, tässä tapauksessa systeemi voi liikkua vain yhteen suuntaan, sairastunut siis joko kuolee tai parantuu ja saa taudille immuniteetin (kuten kohdan 2.3.2 SIR-mallissa). Toisaalta systeemillä voidaan mallintaa esimerkiksi tilannetta, jossa radioaktiivinen atomiydin hajoaa toiseksi ytimeksi, joka on myös radioaktiivinen. Esimerkiksi uraani-238 hajoaa thorium-234:ksi, joka puolestaan hajoaa uraani-234:ksi. Reilu kymmenen hajoamista myöhemmin päästään stabiiliin tilanteeseen, lyijyyn. Systeemissämme y_1 on alkuperäisten ytimien lukumäärä ja y_2 tytärydinten lukumäärä.

2. Ovatko seuraavat funktiot Lipschitz-jatkuvia reaaliakselilla?

$$\text{a)} \quad h(x) = x^2 \qquad \text{b)} \quad h(x) = x^{1/3} \qquad \text{c)} \quad h(x) = |x|$$

Ratkaisu:

a) Ei. Osoitetaan tämä epäsuoralla päättelyllä: Oletaan, että $h(x) = x^2$ on Lipschitz-jatkuva koko reaaliakselilla. Siis löytyy jokin $C > 0$, jolla

$$|h(x) - h(y)| = |x^2 - y^2| \leq C|x - y|, \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Valitaa nyt $x = 2C$ ja $y = 0$. Tällöin pätee

$$|h(x) - h(y)| = |4C^2 - 0| = 2C|2C - 0| = 2C|x - y| > C|x - y|.$$

Siispä mikään $C > 0$ ei toteuta yhtälöä (3) kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Funktio $h(x) = x^2$ ei siten ole Lipschitz-jatkuva koko reaaliakselilla.

Lisätieto: Huomaa, että h on Lipschitz-jatkuva kaikilla rajoitetuilla väleillä väliarvolauseen nojalla (sillä derivaatta on rajoitettu).

b) Ei. Oletetaan jälleen, että funktio on Lipschitz-jatkuva. Siis löytyy jokin $C > 0$, jolla pätee

$$|h(x) - h(y)| = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq C|x - y|, \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Oletetaan, että $C > 1$. (Jos yllä esitetty epäyhtälö toteutuu jollain $C_1 \leq 1$, on se myöskin voimassa luvulla $C > 1$.)
Valitaan $x = \frac{1}{C^3}$ ja $y = 0$. Nyt pätee

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \frac{1}{C} = C^2|\frac{1}{C^3} - 0| > C|x - y|.$$

Siispä mikään $C > 0$ ei toteuta epäyhtälöä (4) kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Funktio $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ei siten ole Lipschitz-jatkuva koko reaaliakselilla.

c) Kyllä. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Nyt kolmioepäyhtälön vasemman puolen avulla näemme suoraan, että

$$|h(x) - h(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{5}$$

Funktio $h(x) = |x|$ on siis Lipschitz-jatkuva koko reaaliakselilla Lipschitz-vakiolla $C = 1$.

Topologinen lisätieto: Jokainen etäisyysfunktio on aina Lipschitz-jatkuva vakiolla 1 (todistus vastaavasti kolmioepäyhtälöllä).

3. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä alkuarvo-ongelmalle

$$y' = -y, \qquad y(0) = 2,$$

ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

Ratkaisu: Ensimmäinen approksimaatio on vakiofunktio

$$y_0(x) = 2,$$

ja paremmat approksimaatiot saadaan iteraatiokaavasta

$$y_{n+1}(x) = 2 + \int_0^x -y_n(t)\,dt = y_0 - \int_0^x y_n(t)\,dt.$$

(kts. kurssimateriaalin sivu 51). Siten saadaan

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int_0^x -y_0(t)\,dt \\ &= 2 - \int_0^x 2\,dt \\ &= 2 - \Big/_0^x 2t \\ &= 2 - 2x, \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 2 + \int_0^x -y_1(t)\,dt \\ &= 2 - \int_0^x 2 - 2t\,dt \\ &= 2 - \Big/_0^x 2t - t^2 \\ &= 2 - (2x - x^2 - 0) \\ &= 2 - 2x + x^2. \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön tarkka ratkaisu on $y = 2e^{-x}$. Sen Taylorin sarja nollassa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 2 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots,$$

joten Picardin iteraation tuottamat ratkaisut ovat tässä tapauksessa ratkaisun Taylorin sarjan osasummia.

4. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä alkuarvo-ongelmalle

$$y' = \cos x, \qquad y(\pi) = 0.$$

Mitä huomaat? Kuinka selität havaintosi?

Ratkaisu: Ensimmäinen approksimaatio on

$$y_0(x) = 0,$$

ja iteraatiokaava on tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= 0 + \int_\pi^x \cos t\,dt \\ &= \Big/_\pi^x \sin t \\ &= \sin x, \end{aligned}$$

eli iteraatio stabiloituu ja kaikki myöhemmät termit ovat sama funktio $\sin x$.

Koska differentiaaliyhtälössä ei esiinny muuttujaa y ollenkaan, ei iteraatiokaava viittaa aiempiin termeihin ja Picardin iteraatio päätyy oikeaan vastaukseen nopeasti. Yhtälön ratkaiseminen ei vaadikaan muuta kuin yhden integroimisen.

5. a) Toteuttaako funktio
$$f(x, y) = e^x \ln(1 + y^2)$$
lokaalin olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen (Lause 4.4 luentomonisteessa) ehdot alueessa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, y \in \mathbb{R}\}$? Eli onko f jatkuva ja toteuttaako se lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta?

b) Onko f tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen alueessa D?

[Vihje: Jatkuvuuteen voit pitää tunnettuna, että jos $h(x)$ ja $g(y)$ ovat jatkuvia (ja h ei riipu muuttujasta y ja g ei riipu muuttujasta x), niin $(x, y) \mapsto h(x)\, g(y)$ on jatkuva.]

Ratkaisu:

a) Funktio f on kahden jatkuvan funktion tulona jatkuva koko alueessa D. Huomionarvoista on, että kaikilla $y \in \mathbb{R}$ pätee $1 + y^2 \geq 1$, minkä vuoksi $\ln(1 + y^2)$ on jatkuva koko alueessa D.

Osoitetaan, että funtkio f toteuttaa alueessa D lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta, eli että kaikille $(x_0, y_0) \in D$ löytyy sellaiset $p, q > 0$, joilla
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\} \subset D,$$
ja funktio f on tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen suorakaiteessa K.

Kiinnitetään piste $(x_0, y_0) \in D$ ja valitaan $p, q > 0$ seuraavasti:
$$\begin{cases} p &= \min\left\{\frac{|x_0 - 0|}{2}, \frac{|x_0 - 2|}{2}\right\}, \\ q &= |y_0|. \end{cases}$$

Nyt selvästi (sillä p on puolet x_0:n ja alueen D lähimmän reunan välisestä etäisyydestä) pätee
$$|x - x_0| \leq p \Rightarrow 0 < x < 2$$
$$(\text{ja } |y - y_0| \leq q \Rightarrow y \in \mathbb{R}).$$

Parametrin q valinnalla ei varsinaisesti ole merkitystä, sillä se vaikuttaa vain myöhemmin saatavan Lipschitz-vakion lukuarvoon.

Joka tapauksessa, näillä lukujen p ja q valinnoilla muodostetulle suorakaiteelle K pätee
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\} \subset D.$$

Tarkastellaan seuraavaksi funktion arvojen etäisyyttä suorakaiteen K pisteissä (x, y_1) ja (x, y_2):
$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left|e^x \ln(1 + y_1^2) - e^x \ln(1 + y_2^2)\right| \\ &= e^x \left|\ln(1 + y_1^2) - \ln(1 + y_2^2)\right| \qquad (6) \\ &\leq e^2 \left|\ln(1 + y_1^2) - \ln(1 + y_2^2)\right| \end{aligned}$$

Oletetaan, että $y_1 < y_2$. Väliarvolauseen mukaan löytyy sellainen $\xi \in (y_1, y_2)$, että seuraava yhtälö on voimassa:

$$e^2 \left|\ln(1 + y_1^2) - \ln(1 + y_2^2)\right| = e^2 \frac{2|\xi|}{1 + \xi^2}|y_2 - y_1|. \tag{7}$$

Nyt saamme etäisyydelle ylärajan, sillä

$$(y_1, y_2) \subset [y_0 - q, y_0 + q] = [y_0 - |y_0|, y_0 + |y_0|],$$

ja siten pätee:

$$e^2 \frac{2|\xi|}{1 + \xi^2}|y_2 - y_1| \leq e^2 \frac{4|y_0|}{1 + 0^2}|y_2 - y_1| = 4|y_0|e^2|y_2 - y_1| \tag{8}$$

Yhdistämällä askeleet (6), (7) ja (8), olemme osoittaneet, että kaikille $(x, y_1), (x, y_2) \in K$ pätee

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 4|y_0|e^2|y_2 - y_1|.$$

Siispä funktio f on muuttujan y suhteen tasaisesti Lipschitz-jatkuva alueessa K.

Näin ollen, funktio f on jatkuva alueessa D, sekä toteuttaa siinä lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta. Funktio f siis toteuttaa lokaalin olemassaolo ja yksikäsitteisyyslauseen ehdot alueessa D.

b) Funktio f on alueessa D tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y osalta.
Tarkastellaan jälleen funktion arvojen välistä etäisyyttä alueen D pisteissä (x, y_1) ja (x, y_2). Kohtien (6) ja (7) tavoin, saamme väliarvolauseen avulla seuraavan arvion:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq e^2 \frac{2|\xi|}{1 + \xi^2}|y_2 - y_1|, \tag{9}$$

missä ξ on jokin luku arvojen y_1 ja y_2 väliltä.
Etsitään kertoimelle $h(\xi) = \frac{2|\xi|}{1+\xi^2}$ yläraja. Koska h on origon suhteen symmetrinen, rajoitutaan arvoihin $\xi \geq 0$. Tällöin

$$h'(\xi) = \frac{2(1 + \xi^2) - 4\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} = \frac{2 - 2\xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$$

ja edelleen

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 1.$$

$\xi = 1$ on siis mahdollinen ääriarvopiste funktiolle h. Koska $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ ja $h(2) = \frac{4}{5}$, niin kyseessä on maksimi. Kaikilla $\xi \in \mathbb{R}$ pätee siis $h(\xi) \leq h(1) = 1$. Nyt voimme jatkaa rivin (9) arviota:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq e^2 \frac{2|\xi|}{1 + \xi^2}|y_2 - y_1| \leq e^2|y_1 - y_2|. \tag{10}$$

Näin olemme osoittaneet, että f on alueessa D tasaisesti jatkuva muuttujan y osalta.

6. **Pakotettu vaimentamaton harmoninen värähtelijä** Differentiaaliyhtälöt I (kevät 2017) -kurssilla Harjoitusten 5 tehtävässä 6 tarkasteltiin harmonista värähtelijää, joka värähteli luonnollisella (kulma)taajuudellaan $\omega \neq 0$. Lisätään yhtälöön harmonista värähtelijää liikuttamaan sinimuotoinen voima, jonka amplitudi on $F_0 > 0$ ja taajuus $\alpha \neq \omega$, jolloin saadaan alkuarvotehtävä

$$y'' + \omega^2 y = F_0 \sin(\alpha x), \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

a) Ratkaise alkuarvotehtävä.

b) 1. Määritä $\lim_{\alpha\to\omega} y(x)$. 2. Etsi jonot x_n^+ ja x_n^- siten, että x_n^+ ja x_n^- kasvavat rajatta ja $\lim_{n\to\infty}\lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^+) = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^-) = -\infty$. Tilannetta kutsutaan puhtaaksi resonanssiksi, ja sovelluksesta riippuen siitä on joko haittaa tai hyötyä.

[Vinkki b)-kohtaan 1: L'Hôpital; 2. kohdan tilannetta voi tarkastella videosta: http://www.youtube.com/watch?v=BE827gwnnk4]

Ratkaisu: a) Yhtälöön liittyvä homogeenisen yhtälön perusjärjestelmä on ratkaistu jo kevään 2017 kurssilla Differentiaaliyhtälöt I (kertaa ratkaisumenetelmä jos on jo unohtunut): $(y_1, y_2) = (\cos(\omega x), \sin(\omega x))$. Etsitään sitten erityisratkaisu $y_p(x)$ yritteellä $y_p = A\sin(\alpha x)$, $A \in \mathbb{R}$. Tällöin $y_p' = \alpha A\cos(\alpha x)$, ja $y_p'' = -\alpha^2 A\sin(\alpha x)$. Sijoitetaan yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
&-\alpha^2 A\sin(\alpha x) + \omega^2 A\sin(\alpha x) = F_0\sin(\alpha x) \Leftrightarrow \\
&A(\omega^2-\alpha^2) = F_0 \Leftrightarrow A = \frac{F_0}{\omega^2-\alpha^2},
\end{aligned}
$$

jolloin yleinen ratkaisu on $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x) + \frac{F_0}{\omega^2-\alpha^2}\sin(\alpha x)$, $c_1, c_2, A \in \mathbb{R}$. Asetetaan sitten alkuehdot:

$$
\begin{aligned}
&y(0) = 0 \Leftrightarrow c_1\cos(\omega\cdot 0) + c_2\sin(\omega\cdot 0) + \frac{F_0}{\omega^2-\alpha^2}\sin(\alpha\cdot 0) = 0 \\
&\Leftrightarrow c_1 = 0, \\
&y'(x) = c_2\omega\cos(\omega x) + \frac{\alpha F_0}{\omega^2-\alpha^2}\cos(\alpha x) \\
&y'(0) = 0 \Leftrightarrow c_2\omega\cos(\omega\cdot 0) + \frac{\alpha F_0}{\omega^2-\alpha^2}\cos(\alpha\cdot 0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{F_0\alpha}{\omega(\omega^2-\alpha^2)},
\end{aligned}
$$

joten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$
y(x) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\alpha^2)}\Big(\omega\sin(\alpha x) - \alpha\sin(\omega x)\Big).
$$

b) 1. Evaluoimalla suoraan saadaan

$$
\lim_{\alpha\to\omega} y(x) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2-\omega^2)}\Big(\omega\sin(\omega x) - \omega\sin(\omega x)\Big) = \frac{0}{0},
$$

mitä ei ole määritelty, mutta tämä määrittelemätön muoto sallii L'Hôpitalin säännön käyttämisen. Merkitään $f(\alpha) = F_0(\omega\sin(\alpha x) - \alpha\sin(\omega x))$, ja $g(\alpha) = \omega(\omega^2-\alpha^2)$, jolloin jos

$$
\lim_{\alpha\to\omega}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \tag{11}
$$

on olemassa, niin pätee

$$
\lim_{\alpha\to\omega}\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{\alpha\to\omega}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}
$$

Siispä laskemalla derivaatat, ja sijoittamalla ne yhtälöön (11) saadaan:

$$
\lim_{\alpha\to\omega}\frac{F_0(\omega x\cos(\alpha x) - \sin(\omega x))}{-2\omega\alpha} = \frac{F_0(\omega x\cos(\omega x) - \sin(\omega x))}{-2\omega^2},
$$

joka on olemassa, ja L'Hôpitalin säännön perusteella haluamamme raja-arvo.

2. Koska $|\sin(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin lineaariseen termiin verrannollinen $x\cos(\omega x)$-termi dominoi lauseketta. Koska $\cos(2\pi n) = 1,\ n \in \mathbb{Z}$, niin haluamamme rajatta kasvava jono on $x_n^- = \frac{2n\pi}{\omega}$. Vastaavasti $x_n^+ = \frac{(2n+1)\pi}{\omega}$. Tällöin:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^+) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0\omega}{-\omega^2}\left(x_n^+\cos(\omega x_n^+) - \sin(\omega x_n^+)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0\omega}{-\omega^2}\left(\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\cos\left(\omega\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\right) - \sin\left(\omega\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0\omega}{-\omega^2}\left(\frac{(2n+1)\pi}{\omega}\cdot(-1) - 0\right) = +\infty,\ \text{ja}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{\alpha\to\omega} y(x_n^-) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0\omega}{-\omega^2}\left(x_n^-\cos(\omega x_n^-) - \sin(\omega x_n^-)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0\omega}{-\omega^2}\left(\frac{2n\pi}{\omega}\cos(\omega\frac{2n\pi}{\omega}) - \sin(\omega\frac{2n\pi}{\omega})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F_0}{-\omega^2}\left(2n\pi\cdot 1 - 0\right) = -\infty.
\end{aligned}$$