DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT I: LUENNOISTA

JARMO JÄÄSKELÄINEN

HUOMAA: Käsittelemme vasta kurssilla Differentiaaliyhtälöt II differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelman

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

ratkaisun $y : I \to \mathbb{R}$ olemassaolon ja yksikäsitteisyyden, missä I on väli ja $x_0 \in I$, (luentomonisteen lauseet 1.2 ja 1.3). Pidämme kuitenkin tunnettuna, että yhtälöille, jotka esiintyvät tehtävissämme, löytyy ratkaisuja ja alkuarvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen.

1. Ensimmäinen viikko

Luennoilla tutustuttiin erityisesti separoituviin differentiaaliyhtälöihin. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (DY)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = p(x)q(y(x))$$

jollain yhden muuttujan funktioilla p ja q. Siis toisin sanoen DY on separoituva, jos koko f:n määrittelyjoukossa muuttujat x ja y voidaan erottaa eli $f(s, t) = p(s)q(t)$.

Separtoituvat yhtälöt voidaan ratkaista seuraavasti:

- Ratkaisu on vakiofunktio $y(x) \equiv y_0$, missä $q(y_0) = 0$ (niin kutsuttu triviaaliratkaisu).
- Muutoin ratkaisulle $y(x)$ pätee $q(y(x)) \neq 0$ ja y löydetään integroimalla:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \iff \frac{dy}{q(y)} = p(x)dx \iff \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx.$$

Luennoilla aloitettiin myös eksaktien yhtälöiden tarkastelu. Differentiaaliyhtälö

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

on *eksakti*, jos on olemassa kaksi kertaa differentioituva funktio F, jolle pätee

$$(*) \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Jos voimme määrittää integraalifunktion F yllä olevista ehdoista $(*)$, niin eksaktin yhtälön implisiittinen ratkaisuperhe on

$$F(x, y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Otimme käyttöön myös helpon keinon eksaktiuden vahvistamiseksi:

Lause 1 (Eksaktisuuslause)**.** *Oletetaan, että $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ovat differentioituvia suorakaiteessa $R = I \times I' \subset \mathbb{R}^2$, missä I ja I' ovat välejä. Differentiaaliyhtälö*

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

on eksaksi suorakaiteessa tasan silloin, kun

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad (x,y) \in R.$$

2. Toinen viikko

Selvitimme, miten eksaktin yhtälön voi aina ratkaista. Eksaktin yhtälön

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

ratkaisuthan löytyivät potentiaalin F avulla. Potentiaali F on kaksi kertaa differentioituva funktio, jolla pätee

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Tällöin yhtälön ratkaisut ovat

$$F(x, y(x)) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Riittää siis selvittää, mikä on $F(x,y)$.

- Valitaan $x_0 \in \mathbb{R}$ väliltä, jossa haluamme ratkaista yhtälön.
- Nyt potentiaali saadaan integroimalla

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int N(x_0, y)dy.$$

Luennoilla tutustuttiin myös *ensimmäisen kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin*

$$(**) \qquad y'(x) + p(x)\, y(x) = q(x).$$

Etsimme integroivan tekijän $\mu(x)$ siten, että

$$\mu(x)\, y'(x) + \mu(x)\, p(x)\, y(x) = \mu(x)\, q(x)$$

on eksakti. Yllä oleva yhtälö on eksakti täsmälleen silloin, kun

$$\mu'(x) = p(x)\, \mu(x).$$

μ voidaan ratkaista tästä separoituvasta yhtälöstä:

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right) \neq 0.$$

Näytimme, että nyt alkuperäisen differentiaaliyhtälön $(**)$ ratkaisuiksi saadaan

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx\right).$$

Tarkastelimme myös joitakin sijoituksia ja muunnoksia (luentomonisteen alaluvut 1.5.2 ja 1.5.3).

3. Kolmas viikko

Tutustuimme ensin *Bernoullin yhtälöön* (luentomonisteen alaluku 1.5.1)

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^{\lambda}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Yhtälö on lineaarinen, kun $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$. Muilla λn arvoilla Bernoullin yhtälö voidaan palauttaa lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi funktiolle $z(x)$, missä z on muunnos $z(x) = y(x)^{1-\lambda}$. Näin löydetään kaikki ratkaisut joilla $y(x) \neq 0$.

Tarkastelimme myös populaatiomalleja (luentomoniste 2.2). Eksponentiaalisessa mallissa populaation kasvun nopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon eli

$$N'(t) = rN(t), \qquad N(0) = N_0 > 0.$$

Separoituvan yhtälön ratkaisu on $N(t) = N_0 e^{rt}$, $t \geqslant 0$, ja mallin käytös, kun aika $t \to \infty$: $N(t) \to \infty$, kun vakio $r > 0$, ja $N(t) \to 0$, kun $r < 0$ (eli väestöräjähdys tai sukupuutto).

Logistisessa mallissa otetaan huomioon populaation sisäistä kilpailua. Logistinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$N'(t) = rN(t) - b(N(t))^2 \qquad N(0) = N_0 > 0,$$

missä vakiot $r > 0$ ja $b > 0$. Differentiaaliyhtälön voi ratkaista joko separoituvana tai Bernoullin yhtälönä. Ratkaisuksi saadaan

$$N(t) = \frac{N_0 r}{N_0 b + (r - bN_0)e^{-rt}}.$$

Termin $r - bN_0$ merkki määrää mallin käytöksen: jos merkki on positiivinen, populaatio on kasvava, ja jos merkki on negatiivinen, populaatio on vähenevä. Molemmissa tapauksissa $\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{r}{b}$. Joskus suhdetta $\frac{r}{b}$ merkitään symbolilla K ja sitä kutsutaan ympäristön kantokyvyksi tai kapasiteetiksi.

Käsittelimme lisäksi sekoitusmalleja (luentomoniste 2.1) ja aloitimme takaa-ajomalliin (luentomoniste 2.4) tutustumisen.

4. Neljäs viikko

Takaa-ajomalli käsiteltiin loppuun (luentomoniste 2.4).

Tutustuimme myös numeerisen ratkaisemisen menetelmiin (luentomoniste 1.6), varsinkin Eulerin menetelmään. Eulerin menetelmällä voidaan approksimoida differentiaaliyhtälön

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

ratkaisua y murtoviivalla. *Eulerin menetelmä* on algoritmi: valitaan hilatiheys/askeltiheys $h > 0$ ja asetetaan

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Nyt y_{n+1} approksimoi ratkaisun y arvoa pisteessä x_{n+1}.

Aloitimme myös toisen kertaluvun lineaaristen yhtälöjen tarkastelun (luentomoniste 3.1)

5. Viides viikko

Lineaarisen toisen kertaluvun homogeenisen yhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{:-o}$$

ratkaisu on

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

jos (y_1, y_2) muodostaa yhtälön perusjärjestelmän. Funktiot $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ muodostavat *perusjärjestelmän* välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos

- $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ ovat homogeenisen yhtälön (:-o) ratkaisuja välillä I ja
- niiden *Wronskin determinantti* $W(y_1, y_2)(x)$ on eri suuri kuin 0 jossain pisteessä $x_0 \in I$ eli

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)\, y_2'(x_0) - y_2(x_0)\, y_1'(x_0) \neq 0.$$

Näytimme luennoilla, että tällöin itse asiassa $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.

Vakiokertoimiselle homogeeniselle differentiaaliyhtälölle löytyy aina perusjärjestelmä seuraavasti: *vakiokertoimisen homogeenisen differentiaaliyhtälön*

$$y'' + a\, y' + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{|;-)}$$

karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + a\, r + b = 0.$$

Karakteristinen yhtälön juuret ovat

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Nyt differentiaaliyhtälön (|;-) perusjärjestelmä on

- $(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$, jos r_1 ja r_2 ovat eri suuria ja reaalisia (siis $a^2 - 4b > 0$),
- $(e^{sx}\cos(tx), e^{sx}\sin(tx))$, jos r_1 ja r_2 ja ei-reaalisia lukuja eli

$$r_1 = \frac{-a + i\sqrt{4b - a^2}}{2} = s + it, \qquad r_2 = \frac{-a - i\sqrt{4b - a^2}}{2} = s - it,$$

  $t \neq 0$ (siis $a^2 - 4b < 0$).
- $(e^{r_1 x}, x e^{r_1 x})$, jos r_1 on kaksinkertainen juuri (siis $a^2 - 4b = 0$ eli $r^2 + ar + b = (r - r_1)^2 = 0$).

6. Kuudes viikko

Kävimme lävitse kertaluvun pudotuksen (luentomoniste 3.4) ja vakion varioinnin (luentomoniste 3.5).

Tutustuimme tarkemmin valistuneen arvauksen tekoon (yritteen valintaan) kuin luentomonisteen esimerkeissä 3.8–3.11. Seuraavat esimerkit antavat katsauksen yritteisiimme $y_p(x)$. Alla PJ tarkoittaa vastaavan homogeenisen yhtälön perusjärjestelmää. Kahden viimeisen $r(x)$:n kohdalla kannattaa verrata $r(x)$:ää ja PJ:ää.

$r(x)$	$y'' - 3y + 2y = r(x)$ PJ on (e^x, e^{2x})	$y'' + 6y + 9y = r(x)$ PJ on (e^{-3x}, xe^{-3x})
vakio	$y_p(x) = A$	$y_p(x) = A$
x^k, $k \in \mathbb{Z}$	$y_p(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j\, x^j$	$y_p(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j\, x^j$
$\sin(tx)$	$y_p(x) = A\sin(tx) + B\cos(tx)$	$y_p(x) = A\sin(tx) + B\cos(tx)$
$\cos(tx)$	$y_p(x) = A\cos(tx) + B\sin(tx)$	$y_p(x) = A\cos(tx) + B\sin(tx)$
e^{tx}	$y_p(x) = A\, xe^{tx}$, $t = 1$ tai $t = 2$	$y_p(x) = A\, x^2 e^{tx}$, $t = -3$
	$y_p(x) = A\, e^{tx}$, muuten	$y_p(x) = A\, e^{tx}$, muuten
$x^k e^{tx}$, $k \in \mathbb{Z}$	$y_p(x) = \sum_{j=1}^{k+1} A_j\, x^j e^{tx}$, $t = 1$ tai $t = 2$	$y_p(x) = \sum_{j=2}^{k+2} A_j\, x^j e^{tx}$, $t = -3$
	$y_p(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j\, x^j e^{tx}$, muuten	$y_p(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j\, x^j e^{tx}$, muuten

7. Seitsemäs viikko

Viikon aiheet olivat huojuvat sillat ja harmoniset värähtelijät sekä kurssin kertaus.