HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 6 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 1.–3.3.2017.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$7y'' + 42y' + 63y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 7.$$

Ratkaisu: a) Kyseessä on toisen kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on

$$0 = 7r^2 + 42r + 63 = 7(r+3)^2$$

eli karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen reaalinen juuri $r = -3$. Nyt differentiaaliyhtälön perusjärjestelmä on

$$(e^{-3x}, xe^{-3x})$$

ja ratkaisut

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Sijoitetaan alkuarvot

$$\begin{cases} 2 = y(1) & = c_1 e^{-3} + c_2 e^{-3} \\ 7 = y'(1) & = -3c_1 e^{-3} - 3c_2 e^{-3} + c_2 e^{-3}, \end{cases}$$

josta voidaan ratkaista $c_1 = -11e^3$ ja $c_2 = 13e^3$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y(x) = -11e^3\, e^{-3x} + 13e^3\, xe^{-3x}.$$

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$x^2 y'' - xy' + y = 0, \qquad x > 0$$

perusjärjestelmä kertaluvun pudotuksella. Eräs yhtälön ratkaisuista on $y_1(x) = x$.

Ratkaisu: Kertaluvun pudotuksessa etsitään $u(x)$ siten, että $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$ on myös yhtälön ratkaisu. Lasketaan yritteen $y_2(x)$ derivaatat:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= u'(x)x + u(x) \\ y_2''(x) &= u''(x)x + u'(x) + u'(x) = u''(x)x + 2u'(x) \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y_2(x)$ derivaattoineen alkuperäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} & x^2\Big(u''(x)x + 2u'(x)\Big) - x\Big(u'(x)x + u(x)\Big) + u(x)x = 0 \Leftrightarrow \\ & x^3 u''(x) + x^2 u' = 0 \Leftrightarrow \\ & u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) = 0. \end{aligned}$$

Koska ylläolevassa yhtälössä esiintyy vain $u(x)$:n derivaattoja, tehdään kertaluvun pudotus: merkitään $v(x) = u'(x)$, jolloin $v'(x) = u''(x)$, ja yhtälö saadaan muotoon

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = 0,$$

joka on separoituva yhtälö. Ratkaistaan se tuttuun tapaan (huomataan triviaaliratkaisu $v(x) = 0$):

$$\begin{aligned}
&v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{v'(x)}{v(x)} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \\
&\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|v| = -\ln x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\
&|v(x)| = e^{-\ln x + c_1} \Leftrightarrow \\
&v(x) = \frac{A}{x},\ A = \pm e^{c_1}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan yllä ratkaistu $v(x)$ takaisin muunnokseen $v(x) = u'(x)$, ja ratkaistaan $u(x)$ separoituvasta yhtälöstä:

$$\begin{aligned}
&v(x) = \frac{A}{x} \Leftrightarrow u'(x) = \frac{A}{x} \Leftrightarrow \\
&\int du = \int \frac{A\ dx}{x} \Leftrightarrow \\
&u(x) = A\ln x + B,\ B \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

valitaan $A = 1, B = 0$, jolloin $y_2(x) = u(x)y_1(x) = \ln(x)x$. Perusjärjestelmä on siis Lauseen 3.14 perusteella $(x, x\ln x)$.

Seuraavassa lisätietoa, joka ei kuulu kurssin oppimäärään. Tehtävän yhtälö on Cauchy-Euler–yhtälö, jonka n:nen kertaluvun muoto (merkitään $y^{(n)}(x)$ n:nen kertaluvun derivaattaa, a_n:t vakioita) on:

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + ... + a_0 y(x) = 0,$$

joka voidaan muuttuvakertoimisuudestaan huolimatta aina palauttaa vakiokertoimiseksi saman kertaluvun yhtälöksi (vrt. Bernoullin yhtälö). Seuraava muunnos toimii siten n-kertaluvun yhtälölläkin, mutta jo neljännen kertaluvun versio kysyy jonkin verran turnauskestävyyttä. Yhtälömme on siis toisen kertaluvun Cauchy-Euler:

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0$$

jossa x on vapaa muuttuja ja $y = y(x)$. Merkitään $t = \ln x \Leftrightarrow e^t = x$, jolloin $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$, ja $y(x) = y(e^t)$. Lasketaan derivaatat ketjusäännöllä:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dt}e^{-t}\Big) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dt}e^{-t}\Big) = e^{-t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\Big) \\
&= e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big),
\end{aligned}$$

ja sijoittamalla muunnos derivaattoineen alkuperäiseen yhtälöön saadaan:

$$\begin{aligned}
&e^{2t}\Big(e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})\Big) - e^t\Big(\frac{dy}{dt}e^{-t}\Big) + y = 0 \Leftrightarrow \\
&\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0,
\end{aligned}$$

joka on vakiokertoiminen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka karakteristisella yhtälöllä $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $r = 1$. Vakiokertoimisen yhtälön ratkaisu on siis

$$\begin{aligned} y(e^t) &= Be^t + Axe^t, \;\; A, B \in \mathbb{R}; \;\; (\text{sijoitetaan } e^t = x) \\ y(x) =& Be^{\ln x} + A \ln x e^{\ln x} = Bx + A\ln(x)x = (A\ln x + B)x, \end{aligned}$$

ja saatu ratkaisu on odotetusti sama kuin kertaluvun pudotuksella ratkaistu.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{a)} \quad y'' + 6y' + 9y = 4x^2 + 6e^x \qquad \text{b)} \quad y'' + 4y = \sin(3x)$$

[Huomaa: vastaavan homogeenisen yhtälön perusjärjestelmät on etsitty jo Harjoituksissa 5.]

Ratkaisu:

(a) Viime viikon harjoituksissa vastaavan homogeeniyhtälön perusjärjestelmäksi saatiin (e^{-3x}, xe^{-3x}), joten riittää enää löytää epähomogeeniselle yhtälölle jokin yksittäisratkaisu.

Funktio e^x on oma derivaattansa, joten yritteeseen riittää asettaa jokin e^x:n moninkerta. Polynomin aste taas pienenee yhdellä derivoitaessa, joten termiä $4x^2$ varten laitetaan yritteeseen siis toisen asteen polynomi. Laaditaan siis yrite

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

jonka derivaatoiksi saadaan

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax + B + De^x, \\ y_p'' &= 2A + De^x. \end{aligned}$$

Kun ne sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} 4x^2 + 6e^x &= 9y_p + 6y_p' + y_p'' \\ &= 9(Ax^2 + Bx + C + De^x) + 6(2Ax + B + De^x) + (2A + De^x) \\ &= 9Ax^2 + (9B + 12A)x + (9C + 6B + 2A) + 16De^x \end{aligned}$$

josta kertoimia vertaamalla saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 4 = 9A \\ 0 = 9B + 12A \\ 0 = 9C + 6B + 2A \\ 6 = 16D. \end{cases}$$

(Funktiojoukon $\{x^2, x, 1, e^x\}$ Wronskin determinantti on

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & e^x \\ 2x & 1 & 0 & e^x \\ 2 & 0 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -2e^x,$$

joka on nollasta poikkeava esimerkiksi nollassa, joten funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia, ja kertoimien vertaaminen on oikeutettua.)

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} A = 4/9 \\ B = -16/27 \\ C = 8/27 \\ D = 3/8, \end{cases}$$

joten sijoittamalla kerrtoimet yritteeseen, erityisratkaisuksi saadaan

$$y_p = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{27}x + \frac{8}{27} + \frac{3}{8}e^x$$

ja täysi ratkaisu on

$$y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{27}x + \frac{8}{27} + \frac{3}{8}e^x + c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Viime viikon harjoituksissa vastaavan homogeeniyhtälön perusjärjestelmäksi saatiin $(\sin 2x, \cos 2x)$, joten riittää enää löytää epähomogeeniselle yhtälölle jokin yksittäisratkaisu.

Koska $(\sin 3x)'' = -9\sin 3x$, valitaan yritteeksi yksinkertaisesti

$$y_p = A\sin 3x, \quad A \in \mathbb{R}$$

jonka derivaatat ovat

$$\begin{aligned} y_p' &= 3A\cos 3x, \\ y_p'' &= -9A\sin 3x. \end{aligned}$$

(Yritteeksi voi myös valita $A\sin 3x + B\cos 3x$. Kun yritteen sijoittaa differentiaaliyhtälöön, huomaa, että $B = 0$.)

Kun ne sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} \sin 3x &= y_p'' + 4y_p \\ &= -9A\sin 3x + 4A\sin 3x \\ &= -5A\sin 3x, \end{aligned}$$

josta kertoimia vertaamalla saadaan $-5A = 1$ eli $A = -1/5$. Löydettiin siis erityisratkaisu $y_p = -(1/5)\sin 3x$, ja täysi ratkaisu on

$$y = -\frac{1}{5}\sin 3x + c_1\sin 2x + c_2\cos 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

[Huomaa: vastaavan homogeenisen yhtälön perusjärjestelmät on etsitty jo Harjoituksissa 5.]

Ratkaisu: Harjoituksien 5 tehtävän 4 perusteella $(y_1(x), y_2(x)) = (e^x, e^{-2x})$ on homogeenisen yhtälön $y'' + y' - 2y = 0$ perusjärjestelmä. Vastaavan epähomogeenisen yhtälön

$$y'' + y' - 2y = xe^x \tag{1}$$

kaikki ratkaisut ovat muotoa $y(x) = y_p(x)+c_1e^x+c_2e^{-2x}$, jossa $y_p(x)$ on jokin yhtälön (1) yksittäisratkaisu ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Koska yhtälön (1) oikea puoli on muotoa $xy_1(x)$, kokeillaan yritettä $y_p(x) = Ax^2e^x + Bxe^x$, $A, B \in \mathbb{R}$ (termiä Ce^x ei homogeenisen yhtälön ratkaisuna tarvita), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ax^2e^x + (2A+B)xe^x + Be^x; \\ y_p''(x) &= Ax^2e^x + (4A+B)xe^x + (2A+2B)e^x. \end{aligned}$$

Siispä

$$y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = 6Axe^x + (2A+3B)e^x = xe^x \Leftrightarrow \begin{cases} 6A & = 1 \\ 2A+3B & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow A = 1/6 \text{ ja } B = -1/9.$$

Näin ollen $y_p(x) = \frac{1}{6}x^2e^x - \frac{1}{9}xe^x$ ja kaikki ratkaisut ovat siten muotoa

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2e^x - \frac{1}{9}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}.$$

[Huomaa: vastaavan homogeenisen yhtälön perusjärjestelmät on etsitty jo Harjoituksissa 5.]

Ratkaisu: Differentiaaliyhtälölle on etsitty harjoituksissa 5 perusjärjestelmä (e^{-x}, xe^{-x}). Etsitään epähomogeeniselle yhtälölle jokin ratkaisu valistuneella arvauksella/yritteellä.

Koska yhtälön oikea puoli $3xe^{-x}$ ratkaisee myös homogeenisen yhtälön, sitä ei voi suoraan käyttää yritteenä, mutta kertomalla sitä sopivalla polynomilla saamme toimivan yritteen. Koska homogeenisella differentiaaliyhtälöllä on tuplajuuri, yrite on lineaarinen yhdiste $x^2\,(3xe^{-x})$:stä ja sen lineaarisesti riippumattomista derivaatoista eli $y_p(x) = Ax^3e^{-x} + Bx^2e^{-x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$ (muita derivaattoja ei tarvitse laittaa yritteeseen, sillä termit $C\,xe^{-x}$ ja $D\,e^{-x}$ tulevat mukaan ratkaisuun jo perusjärjestelmästä). Lasketaan

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - (Ax^3 + Bx^2)e^{-x} = (-Ax^3 + (3A-B)x^2 + 2Bx)e^{-x} \\ y_p''(x) &= (-3Ax^2 + 2(3A-B)x + 2B)e^{-x} - (-Ax^3 + (3A-B)x^2 + 2Bx)e^{-x} \\ &= (Ax^3 + (B-6A)x^2 + (6A-4B)x + 2B)e^{-x}, \end{aligned}$$

joten $y_p'' + 2y_p' + y_p = (6Ax + 2B)e^{-x}$. Valitsemalla $A = 1/2$ ja $B = 0$ yrite $y_p(x) = Ax^3e^{-x} + Bx^2e^{-x} = \frac{1}{2}x^3e^{-x}$ ratkaisee tehtävämme epähomogeenisen yhtälön.

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x},$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

6. a) Mikä on differentiaaliyhtälön

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

perusjärjestelmä?

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$$

vakion varioinnilla.

Ratkaisu:

a) Yhtälön

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

karakteristinen polynomi on

$$r^2 - 3r + 2.$$

Tämän juuret ovat $r_1 = 1$ ja $r_2 = 2$. Lauseen 3.11 mukaan yhtälön perusjärjestelmä on tällöin (e^x, e^{2x}) ja sen kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Lauseen 3.15 todistuksen tapaan, lähdetään liikkeelle yritteestä

$$y_p(x) = u(x)e^x + v(x)e^{2x},$$

missä funktiot v ja u oletetaan derivoituviksi. Nyt

$$y_p'(x) = u'(x)e^x + v'(x)e^{2x} + u(x)e^x + 2v(x)e^{2x}.$$

Kuten lauseen 3.15 todistuksessakin, vaaditaan toisen kertaluvun derivaatan yksinkertaistamiseksi (siis ei haluta u:n ja v:n toisia derivaattoja), että

$$u'(x)e^x + v'(x)e^{2x} = 0.$$

Nyt

$$y_p''(x) = u'(x)e^x + 2v'(x)e^{2x} + u(x)e^x + 4v(x)e^{2x}.$$

Kirjoitetaan nyt epähomogeeniyhtälö:

$$\begin{aligned}
\sin(e^{-x}) &= y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p \\
&= u'(x)e^x + 2v'(x)e^{2x} + u(x)(e^x - 3e^x + 2e^x) + v(x)(4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x}) \\
&= u'(x)e^x + 2v'(x)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä saatu yhtälö aiemmin vaadittuun ehtoon, saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} u'(x)e^x + v'(x)e^{2x} &= 0 \\ u'(x)e^x + 2v'(x)e^{2x} &= \sin(e^{-x}). \end{cases}$$

Nyt ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$v'(x) = -\frac{u'(x)e^x}{e^{2x}} = -\frac{u'(x)}{e^x}$$

ja tällöin sijoittamalla toiseen yhtälöön

$$u'(x)e^x - 2u'(x)e^x = \sin(e^{-x}).$$

Siis yhtälöparin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} u'(x) &= -\sin(e^{-x})e^{-x} \\ v'(x) &= \sin(e^{-x})e^{-2x} \end{cases}$$

Näistä saadaan edelleen integroimalla (v:ssä osittaisintegrointi funktioille $\cos(e^{-x})$ ja e^{-x})

$$\begin{cases} u(x) &= -\cos(e^{-x}) \\ v(x) &= \cos(e^{-x})e^{-x} - \int \cos(e^{-x})(-e^{-x})\,dx = \cos(e^{-x})e^{-x} - \sin(e^{-x}). \end{cases}$$

Lauseen 3.15 mukaan yhtälön kaikki ratkaisut ovat täten muotoa

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^x + c_2e^{2x} + y_p(x) \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + (-\cos(e^{-x})e^x) + (\cos(e^{-x})e^{-x} - \sin(e^{-x}))e^{2x} \\ &= (c_1 - \cos(e^{-x}))e^x + (c_2 + \cos(e^{-x})e^{-x} - \sin(e^{-x}))e^{2x}, \end{aligned}$$

missä $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.