

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 5

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 22.-24.2.2017.

1. a) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y' = 2000y - 10y^2 \quad y(0) = 20.$$

- b) Mikä on ratkaisun $y(x)$ raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$?

2. a) Approksimoi alkuarvot tehtävän

$$y'(x) = y(x) - x \quad y(1) = 7$$

ratkaisun arvoa pisteessä $x = 2$ numeerisesti Eulerin menetelmällä, kun askeltilaus $h = \frac{1}{4}$.

- b) Onko a)-kohdan differentiaaliyhtälö eksakti? Ratkaise differentiaaliyhtälö ja vertaa a)-kohdan approksimoitua arvoa tarkkaan ratkaisuun.

3. a) Laske Wronskin determinantit $W(y_1, y_2)(x)$, kun $(y_1(x), y_2(x))$ on

$$\text{i) } (x, x^2) \quad \text{ii) } \left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad 0 < x < \infty.$$

- b) Muodostavatko funktiot $y_1(x) = e^x \cos x$ ja $y_2(x) = e^x \sin x$ yhtälön

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

perusjärjestelmän? Perustele vastauksesi.

4. a) Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{i) } y'' + y' - 2y = 0 \quad \text{ii) } y'' - 8y' + 16y = 0$$

- b) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{i) } y'' + 4y = 0 \quad \text{ii) } y'' + y' - y = 0 \quad \text{iii) } y'' + 6y' + 9y = 0.$$

6. Vaimentumattoman harmonisen värähtelijän yhtälö on

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0,$$

missä ω on reaalilukuvakio, $\omega \neq 0$.

- a) Etsi yhtälön perusjärjestelmä (y_1, y_2) .

- b) Näytä, että myös

$$y(x) = A \cos(\omega x + \delta),$$

on yhtälön ratkaisu. Yllä $A \geq 0$ ja δ ovat reaalilukuvakioita.

- c) Esitä b)-kohdan ratkaisu perusjärjestelmän avulla eli $y(x) = A \cos(\omega x + \delta) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esitä amplitudi A ja vaihe-ero δ vakioiden c_1 ja c_2 avulla/funtioina.