HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 22.–24.2.2017.

1. a) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y' = 2000\,y - 10\,y^2 \qquad y(0) = 20.$$

b) Mikä on ratkaisun $y(x)$ raja-arvo, kun $x \to \infty$?

Ratkaisu: a) Kyseessä on logistinen differentiaaliyhtälö. Yhtälön voi ratkaista ainakin kahdella tavalla.

1. Yhtälö on Bernoullin yhtälö parametrillä $\lambda = 2$. Sen triviaaliratkaisut ovat $y = 0$ ja $y = 200$. Teemme sijoituksen $z = y^{1-2} = y^{-1}$ $(y(x) \neq 0)$, jolloin saamme lineaarisen ensimmäisen kertaluvun yhtälön funktiolle $z(x)$:

$$z' = -y^{-2}\,y' = -2000\,y^{-1} + 10 = -2000\,z + 10.$$

Siis $z' + 2000\,z = 10$.
Yhtälön integroiva tekijä on $\mu(x) = \exp\left(\int 2000dx\right) = C_1\,e^{2000x}$. Valitaan $C_1 = 1$, jolloin integroiva tekijä on $\mu(x) = e^{2000x}$.
Nyt

$$e^{2000x}z' + 2000\,e^{2000x}z = 10e^{2000x} \iff \frac{d}{dx}\left(e^{2000x}z\right) = 10e^{2000x}$$

Siis integroimalla saadaan

$$\frac{1}{y(x)} = z(x) = e^{-2000x}\int 10e^{2000x}dx = e^{-2000x}\left(\frac{1}{200}e^{2000x} + C\right) = \frac{1}{200} + Ce^{-2000x}.$$

Sijoitetaan alkuarvo

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{200} + C \Longrightarrow C = \frac{9}{200}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = \frac{200}{1 + 9e^{-2000x}}.$$

Huomataan myös, että $y(x) \neq 0$ kaikilla reaaliluvuilla x (sijoituksessa $z = y^{-1}$ oletimme, että $y \neq 0$). Ratkaisumme on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

2. Yhtälö on separoituva. Sen triviaaliratkaisut ovat $y = 0$ ja $y = 200$. Muut ratkaisut saadaan

$$\frac{dy}{dx} = 2000\,y - 10y^2 \iff \frac{dy}{2000\,y - 10y^2} = dx. \tag{1}$$

Nyt osamurtohajotelmalla

$$\int \frac{dy}{2000\,y - 10y^2} = \int \frac{dy}{10y\,(200 - y)} = \int \left(\frac{1}{2000y} + \frac{1}{2000(200 - y)}\right) dy$$
$$= \frac{1}{2000}\ln|2000y| - \frac{1}{2000}\ln|2000(200 - y)| + C_1$$

ja separoinnista (1) ratkaisuksi saadaan

$$\frac{1}{2000}\ln|2000y| - \frac{1}{2000}\ln|2000(200-y)| = x + C_2$$

eli

$$\frac{|y|}{|200-y|} = \frac{|2000y|}{|2000(200-y)|} = C_3 e^{2000x}. \tag{2}$$

C_3 voidaan ratkaista alkuarvon avulla

$$\frac{|y(0)|}{|200-y(0)|} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9} = C_3,$$

jolloin alkuarvo-ongelman ratkaisu saadaan yhtälöstä (2):

$$y(x) = \frac{\frac{200}{9}e^{2000x}}{1+\frac{1}{9}e^{2000x}}.$$

b) Kun $x \to \infty$, niin a)-kohdan ratkaisumme menee kohti lukua 200 eli

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 200.$$

2. a) Approksimoi alkuarvotehtävän

$$y'(x) = y(x) - x \qquad y(1) = 7$$

ratkaisun arvoa pisteessä $x = 2$ numeerisesti Eulerin menetelmällä, kun askeltiheys $h = \frac{1}{4}$.

b) Onko a)-kohdan differentiaaliyhtälö eksakti? Ratkaise differentiaaliyhtälö ja vertaa a)-kohdan approksimoitua arvoa tarkkaan ratkaisuun.

Ratkaisu:

(a) Eulerin menetelmä toimii arvioimalla yhtälön ratkaisua tunnettuun pisteeseen piirretyllä tangentilla, jonka kulmakerroin saadaan differentiaaliyhtälöstä. Kun alkuarvot x_0, y_0 ja askelväli h on asetettu, saadaan approksimaatiopisteet laskettua kaavalla

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hy'(x_n) \\ &= y_n + h(y_n - x_n) \\ &= (1+h)y_n - hx_n. \end{aligned}$$

Tehtävän tapauksessa $x_0 = 1, y_0 = 7$ ja $h = 0.25$, joten rekursio saa muodon

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 0.25 \\ y_{n+1} &= 1.25y_n - 0.25x_n. \end{aligned}$$

Voidaan siis laskea

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, && y_0 = 7; \\ &x_1 = 1.25, && y_1 = 1.25\cdot 7 - 0.25\cdot 1 = 8.5; \\ &x_2 = 1.5, && y_2 = 1.25\cdot 8.5 - 0.25\cdot 1.25 = 10.3125; \\ &x_3 = 1.75, && y_3 = 1.25\cdot 10.3125 - 0.25\cdot 1.5 = 12.515625; \\ &x_4 = 2.0, && y_4 = 1.25\cdot 12.515625 - 0.25\cdot 1.75 = 15.20703125 \end{aligned}$$

eli approksimaatioksi saadaan $y(2) \approx 15.21$.

(b) Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x - y + y' = 0$$

joka on muotoa $M(x,y)+N(x,y)y' = 0$, missä $M(x,y) = x-y$ ja $N(x,y) = 1$. Koska $\partial_y M(x,y) = -1 \neq 0 = \partial_x N(x,y)$, yhtälö ei ole eksakti missään $\mathbb{R}^2$:n alueessa.

Kirjoittamalla yhtälö muotoon $y' - y = -x$, nähdään, että se on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka eräs integroiva tekijä on $\mu(x) = \exp(\int -1\,dx) = e^{-x}$. Kertomalla yhtälö puolittain integroivalla tekijällä saadaan

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}y' - e^{-x}y = -xe^{-x},$$

ja integroimalla puolittain välin $[1,x]$ yli saadaan (oikealla puolella osittaisintegroidaan; katso esimerkiksi Harjoitusten 2 tehtävä 4)

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{d}{dx}(e^{-x}y(x))\,dx &= \int_1^x -xe^{-x} \\ \Big/_1^x e^{-x}y(x) &= \Big/_1^x (1+x)e^{-x} \\ e^{-x}y(x) - e^{-1}y(1) &= (1+x)e^{-x} - (1+1)e^{-1}, \end{aligned}$$

josta y:n lausekkeeksi ratkaistaan

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + x + (y(1)-2)e^{x-1} \\ &= 1 + x + 5e^{x-1} \end{aligned}$$

kun sijoitetaan alkuarvo $y(1) = 7$.

Haluttu tarkka arvo on siten $y(2) = 1 + 2 + 5e^{2-1} = 3 + 5e \approx 16.59$. Approksimaatio on siis oikeaa kokoluokkaa, mutta tarkempaa arviota varten pitäisi käyttää paljon pienempää askeltiheyttä.

3. a) Laske Wronskin determinantit $W(y_1,y_2)(x)$, kun $(y_1(x), y_2(x))$ on

$$\text{i)}\quad (x, x^2) \qquad \text{ii)}\quad \left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad 0 < x < \infty.$$

b) Muodostavatko funktiot $y_1(x) = e^x \cos x$ ja $y_2(x) = e^x \sin x$ yhtälön

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

perusjärjestelmän? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu: ai) Funktioiden y_1 ja y_2 derivaatat ovat $y_1'(x) = 1$ ja $y_2'(x) = 2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen Wronskin determinantti on

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x \cdot 2x - x^2 \cdot 1 = x^2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

aii) Nyt $y_1'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ ja $y_2'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$ ja Wronskin determinantiksi saadaan

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1/2} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix} = x^{1/2} \cdot (-1/2)x^{-3/2} - x^{-1/2} \cdot (1/2)x^{-1/2} = -\frac{1}{x}$$

kaikilla $0 < x < \infty$.

Itseasiassa yhtälöpari muodostaa perusjärjestelmän esimerkiksi luentomonisteen esimerkin 3.6 tapauksessa.

b) Funktiot $y_1(x) = e^x \cos x$ ja $y_2(x) = e^x \sin x$ muodostavat Lauseen 3.8 (ks. myös Seuraus 3.9) nojalla yhtälön

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{3}$$

perusjärjestelmän mikäli ne ovat sen ratkaisuja (tässä kaikilla $x \in \mathbb{R}$) ja Wronskin determinantille pätee $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$ (ja siis kaikilla x Seurauksen 3.9 nojalla). Lasketaan ensin derivaatat:

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x);\\
y_1''(x) &= e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x;\\
y_2'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x);\\
y_2''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (3) havaitaan, että

$$y_1'' - 2y_1' + 2y_1 = 0 = y_2'' - 2y_2' + 2y_2,$$

joten funktiot y_1 ja y_2 ovat sen ratkaisuja.

Koska lisäksi Wronskin determinantille pätee

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix}\\
&= e^{2x} \cos x(\sin x + \cos x) - e^{2x} \sin x(\cos x - \sin x)\\
&= e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = e^{2x} \neq 0
\end{aligned}$$

kaikilla x, niin (y_1, y_2) on yhtälön (3) perusjärjestelmä.

4. a) Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{i)} \quad y'' + y' - 2y = 0 \qquad \text{ii)} \quad y'' - 8y' + 16y = 0$$

b) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -3$$

Ratkaisu: a) i) Kyseessä on toisen kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö. Sen karakteristinen yhtälö on $r^2+r-2 = 0$, jonka juuriksi huomataan tavalla tai toisella luvut 1 ja -2. Täten lauseen 3.11 nojalla differentiaaliyhtälöllä on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^x, e^{-2x})$, ja sen ratkaisu on

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Kyseessä on jälleen toisen kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö. Sen karakteristinen yhtälö on $r^2 - 8x + 16 = 0$, jolla on kaksinkertainen juuri 4. Täten lauseen 3.12 nojalla differentiaaliyhtälöllä on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^{4x}, xe^{4x})$, ja sen ratkaisu on

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Kyseessä on toisen kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö. Selvitetään ensin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu. Differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö $r^2+2r+1=0$, jolla on kaksinkertainen juuri -1. Täten lauseen 3.12 nojalla differentiaaliyhtälöllä on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^{-x}, xe^{-x})$ ja sen ratkaisu on

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Selvitetään sitten alkuarvo-ongelmaa vastaavat vakiot c_1 ja c_2. Sijoittamalla yhtälöön $x = 0$ saamme

$$1 = y(0) = c_1 e^{-0} + c_2\, 0\, e^{-0} = c_1,$$

ja derivoimalla yhtälö puolittain x:n suhteen saamme yhtälön

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(1-x)e^{-x},$$

johon sijoittamalla $x = 0$ huomataan, että

$$-3 = y'(0) = -c_1 e^{-0} + c_2(1-0)e^{-0} = -1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = -2.$$

Alkuarvo-ongelman ratkaisu on siis

$$y(x) = e^{-x} - 2xe^{-x} = (1-2x)e^{-x}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

$$\text{i)}\quad y'' + 4y = 0 \qquad \text{ii)}\quad y'' + y' - y = 0 \qquad \text{iii)}\quad y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Ratkaisu:

i) Kyseessä on homogeeninen, toisen kertaluvun vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö. Yhtälön karakteristinen polynomi on $r^2 + 4$. Tällä polynomilla on kaksi imaginaarijuurta, $r_1 = 2i$ ja $r_2 = -2i$. Lauseen 3.13. mukaan funktiot $y_1(x) = \sin(2x)$ ja $y_2(x) = \cos(2x)$ muodostavat yhtälön perusjärjestelmän ja kaikki ratkaisut saadaan muodosta

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Tämän vakiokertoimisen toisen kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön karakteristisen polynomin, r^2+r-1, juuret ovat $r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Lauseen 3.11 mukaan funktiot $y_1(x) = e^{r_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{r_2 x}$ muodostavat täten yhtälön perusjärjestelmän, eli yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

iii) Tämän vakiokertoimisen toisen kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön karakteristisella polynomilla, $r^2 + 6r + 9$, on kaksinkertainen juuri $r = -3$. Täten Lauseen 3.12 mukaan funktiot $y_1(x) = e^{-3x}$ ja $y_2(x) = xe^{-3x}$ muodostavat yhtälön perusjärjestelmän, eli yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Vaimentumattoman harmonisen värähtelijän yhtälö on

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0,$$

missä ω on reaalilukuvakio, $\omega \neq 0$.

a) Etsi yhtälön perusjärjestelmä (y_1, y_2).

b) Näytä, että myös

$$y(x) = A\cos(\omega x + \delta),$$

on yhtälön ratkaisu. Yllä $A \geq 0$ ja δ ovat reaalilukuvakioita.

c) Esitä b)-kohdan ratkaisu perusjärjestelmän avulla eli $y(x) = A\cos(\omega x + \delta) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esitä amplitudi A, $A \geq 0$, ja vaihe-ero δ vakioiden c_1 ja c_2 avulla/funktioina.

Ratkaisu: a) Tehtävän differentiaaliyhtälö on vakiokertoiminen homogeninen toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka karakteristinen yhtälö on $r^2 + \omega^2 = 0$, josta $r = \pm i\omega$. Koska juuret ovat kompleksiset, niin Lauseen 3.13 perusteella yhtälöllä on perusjärjestelmä $(\cos(\omega x), \sin(\omega x))$.

b) Osoitetaan että myös $y(x) = A\cos(\omega x + \delta)$ ratkaisee yhtälön. Lasketaan derivaatat: $y'(x) = -A\omega\sin(\omega x + \delta)$ ja $y''(x) = -A\omega^2\cos(\omega x + \delta)$. Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön saadaan

$$-A\omega^2\cos(\omega x + \delta) + \omega^2 A\cos(\omega x + \delta) = 0,$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten myös $y(x) = A\cos(\omega x + \delta)$ on yhtälön ratkaisu. Huomaa, että vapaasti valittavat vakiot mahdollistavat ratkaisun toisen kertaluvun alkuarvotehtävälle.

c) Ratkaistaan δ ja A yhtälöstä

$$A\cos(\omega x + \delta) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x). \tag{4}$$

Derivoidaan ylläoleva lauseke:

$$-A\omega\sin(\omega x + \delta) = -c_1\omega\sin(\omega x) + c_2\omega\cos(\omega x). \tag{5}$$

Koska ylläolevat lausekkeet ovat voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$, valitaan sopiva piste $x = 0$, ja sijoitetaan se yhtälöihin (4) ja (5), jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A\cos(\delta) = c_1 \\ -A\omega\sin(\delta) = c_2\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2\cos^2(\delta) = c_1^2 \\ A^2\sin^2(\delta) = c_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow A^2(\cos^2(\delta) + \sin^2(\delta)) = c_1^2 + c_2^2 \tag{6}$$

joten $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Jakamalla yhtälöparin alempi yhtälö ylemmällä saadaan $\tan(\delta) = \frac{-c_2}{c_1}$, tai toisaalta yhtälöistä suoraan $\cos(\delta) = \frac{c_1}{A}$, ja $\sin(\delta) = \frac{-c_2}{A}$.

Tehtävänanto on jo sinällään täytetty, mutta tarkastellaan vielä δ:n määrittelyvälejä vakioiden c_1, c_2 suhteen. Jos $A = 0$, niin $c_1 = c_2 = 0$, ja δ voidaan valita mielivaltaisesti. Oletetaan siis $A > 0$.

I tapa: Yhtälöparilla

$$\begin{cases} \cos(\delta) = \frac{c_1}{A} \\ \sin(\delta) = \frac{-c_2}{A} \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, sillä $(\frac{c_1}{A})^2 + (\frac{c_2}{A})^2 = 1$. Ensinnäkin $\delta = \arccos(\frac{c_1}{A}), \delta \in [0, \pi]$ jos $\sin\delta \geq 0$ (eli $c_2 \leq 0$), ja $\delta = 2\pi - \arccos(\frac{c_1}{A}), \delta \in (\pi, 2\pi)$, jos $\sin\delta < 0$ ($c_2 > 0$). Siis $\delta \in [0, 2\pi)$.

II tapa: $\delta = -\arctan(\frac{c_2}{c_1}), \delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kun $\cos\delta > 0$ (eli $c_1 > 0$). Toisaalta $\delta = \pi - \arctan(\frac{c_2}{c_1}), \delta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, kun $\cos\delta < 0$ ($c_1 < 0$). Lisäksi $\delta = \frac{\pi}{2}$, kun $c_1 = 0$, ja $\sin\delta > 0$ (eli $c_2 < 0$), ja myös $\delta = \frac{3\pi}{2}$, kun $c_1 = 0$ ja $\sin\delta < 0$ ($c_2 > 0$). Siis $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Huomaa, että molemmin tavoin määritellyt välit ovat puoliavoimia, sillä $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tapoja on siis useita määrätä jokin 2π-mittainen väli.