HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 4
Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 15.–17.2.2017.

1. **Kirjaimellinen hajoamisprosessi** Luentomonisteen sivulla 3 esitellään radioaktiivisten ydinten hajoamisen differentiaaliyhtälö:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t), \quad N(0) = N_0, \tag{1}$$

ja $\left|\frac{dN}{dt}\right|$ määritellään ydinten aktiivisuutena ("hajoamista per sekunti", yksikkö Bq, becquerel), λ on kullekin ytimelle ominainen hajoamisvakio, ja N_0 on radioaktiivisten ydinten lukumäärä alussa.

a) *Puoliintumisajaksi (engl. half-life)* $T_{1/2}$ kutsutaan hajoamisvakiosta λ riippuvaa aikaa, jonka kuluessa puolet ytimistä on hajonnut toisiksi ytimiksi. Johda differentiaaliyhtälön (1) ratkaisusta lauseke puoliintumisajalle.

b) Syöpähoidossa käytettävillä radioaktiivisilla aineilla on tietty käyttöikä, jonka jälkeen aine on liian hajonnutta tuhotakseen tehokkaasti syöpäsoluja. Ota kantaa seuraavaan: saat käsiisi näytteen koboltti-60-isotooppia, jolle $T_{1/2} = 5.271$ vuotta. Kolme vuotta sitten, kun näyte valmistettiin, sen aktiivisuus oli $1.85 \cdot 10^{14}$ Bq. Jotta koboltti-60 voidaan käyttää syöpähoitoon, sen aktiivisuuden pitää olla yli $1.30 \cdot 10^{14}$ Bq. Onko näyte edelleen käyttökelpoinen syöpähoitoon?

2. **Otetaan ilmanvastus huomioon** Ammutaan tykinkuula, jonka massa m on 7 kg, pystysuoraan ilmaan. Kuulaan vaikuttavat voimat ovat painovoima mg sekä kuulan nopeuden v neliöön verrannollinen ilmanvastusvoima kv^2, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, $k = 0.0005$. Kun suunnaksi ylöspäin valitaan positiivinen x-akseli, dynamiikan peruslaista ($F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$) johdettu kuulan liikeyhtälö on alkuarvotehtävä:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \qquad v(0) = v_0 = 100\,\mathrm{m/s}.$$

a) Ratkaise alkuarvotehtävä eli kuulan nopeus $v(t)$, $t \geq 0$.

b) Ratkaise tykinkuulan liikerata $x(t)$, kun $x(0) = 0$.

c) Määritä a)- ja b)-kohtien avulla tykinkuulan saavuttama maksimikorkeus x_{max}.

[Vinkki b)-kohtaan: huomaa että määritelmän mukaan: $x'(t) = v(t)$]

[Vinkki c)-kohtaan: Tykinkuulan liikeradan lakipisteessä tapahtuu jotain, josta on mahdollista saada lisäinformaatiota.]

3. **Lisääntyvästi lisääntyvät jänikset** Mallinnetaan jänispopulaation kasvua luentomonisteen luvun 2.2.1 malthusilaisella (eksponentiaalisella) mallilla. Merkitään alkupopulaation kooksi N_0. Populaatio kasvoi ensin Malthusin parametrilla $r = 0.03$, kunnes yllättäen hetkellä T kuukautta parametri olikin $r = 0.05$. Kun yhteensä 20 kuukautta on kulunut, populaatio on kaksinkertaistunut alkuperäisestä. Selvitä hetki T.

[Vinkki: ratkaise yhtälö $N' = 0.03N$ ensin alueessa $[0, T]$, josta saatu $N(T)$ on alkuehto ratkaisulle alueessa $[T, 20]$.]

4. **RL-sarjavirtapiiri** Elektroniikassa käytettävän RL-virtapiirin (vastus ja käämi), virran i (yksikkö A, ampeeri) käytöstä mallinnetaan differentiaaliyhtälöllä:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

jossa R on vastus (yksikkö Ω, ohmi), L on käämin induktanssi (yksikkö H, henry). Jännite E (yksikkö V, voltti) on:

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 \leq \text{t} \leq 20 \\ 0, & \text{t} > 20 \end{cases}$$

a) Ratkaise $i(t)$, $t \geq 0$, kun $i(0) = 0$.

b) Näytä, että

$$1) \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_0}{L} \qquad \text{ja} \qquad 2) \quad i(t) \to 0, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

c) Jos b)-kohdan jälkimmäistä tulosta ($i(t) \to 0$) haluaa viivyttää/hidastaa, miten aidosti positiiviset parametrit R, L kannattaa valita? Lyhyt perustelu riittää.

[Vinkki a)-kohtaan: $E(t)$ on määritelty paloittain, ratkaise $i(t)$ kahdessa määrittelyalueessa $I = [0, 20]$ ja $I' = [20, \infty)$. Tällöin ensimmäisen alueen ratkaisusta pisteessä $t = 20$, $i(20)$, saadaan alkuehto ratkaisulle jälkimmäisessä alueessa.]

5. **Newtonilainen gravitaatio** Kahden kappaleen, joiden massat ovat m_1 ja m_2, toisiinsa kohdistama painovoima on Newtonin gravitaatioteorian mukaan kappaleiden etäisyyden neliöön kääntäen verrannollinen, ja vaikuttaa kappaleet toisiinsa yhdistävällä janalla. Gravitaatiolle voidaan johtaa gravitaatiopotentiaalista differentiaaliyhtälö

$$G\, m_1 m_2 \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

jossa x ja y ovat m_1-massaisen kappaleen koordinaatit, ja m_2-massainen kappale on asetettu origoon. G on Newtonin gravitaatiovakio.

a) Osoita että kyseinen differentiaaliyhtälö on eksakti ja etsi potentiaali F sekä implisiittiset ratkaisut $F(x, y(x)) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Hyvä ystäväsi Jarmo tekee ns. baumgartnerit ja päättää hypätä monikansallisen energiajuomayrityksen mainosasuun verhoutuneena laskuvarjohypyn noin 40 km korkeudelta stratosfääristä. Mikäli tapahtuukin pahin mahdollinen ja odottamattoman vahva aurinkotuuli pyyhkäisee Jarmon Maata kiertävälle radalle, tunnistatko ratkaisujen implisiittimuodosta miltä Jarmon ratakäyrät näyttäisivät $(x, y(x))$-tasossa?