**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017**
**Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotuksia**

*Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 15.–17.2.2017.*

1. **Kirjaimellinen hajoamisprosessi** Luentomonisteen sivulla 3 esitellään radioaktiivisten ydinten hajoamisen differentiaaliyhtälö:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t), \quad N(0) = N_0, \tag{1}$$

ja $\left|\frac{dN}{dt}\right|$ määritellään ydinten aktiivisuutena ("hajoamista per sekunti", yksikkö Bq, becquerel), $\lambda$ on kullekin ytimelle ominainen hajoamisvakio, ja $N_0$ on radioaktiivisten ydinten lukumäärä alussa.

a) *Puoliintumisajaksi (engl. half-life)* $T_{1/2}$ kutsutaan hajoamisvakiosta $\lambda$ riippuvaa aikaa, jonka kuluessa puolet ytimistä on hajonnut toisiksi ytimiksi. Johda differentiaaliyhtälön (1) ratkaisusta lauseke puoliintumisajalle.

b) Syöpähoidossa käytettävillä radioaktiivisilla aineilla on tietty käyttöikä, jonka jälkeen aine on liian hajonnutta tuhotakseen tehokkaasti syöpäsoluja. Ota kantaa seuraavaan: saat käsiisi näytteen koboltti-60-isotooppia, jolle $T_{1/2} = 5.271$ vuotta. Kolme vuotta sitten, kun näyte valmistettiin, sen aktiivisuus oli $1.85 \cdot 10^{14}$ Bq. Jotta koboltti-60 voidaan käyttää syöpähoitoon, sen aktiivisuuden pitää olla yli $1.30 \cdot 10^{14}$ Bq. Onko näyte edelleen käyttökelpoinen syöpähoitoon?

*Ratkaisu:* a) Differentiaaliyhtälö (1) on separoituva ja se on jo ratkaistu luentomonisteen esimerkissä 1.1. Ratkaisu on

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Puoliintumisaika $T_{1/2}$ saadaan näin ollen seuraavasti:

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2}.$$

Siis

$$2 = e^{\lambda T_{1/2}} \iff T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

b) Tiedämme koboltti-60-isotooppille, että $|N'(0)| = 1.85 \cdot 10^{14}$ (Bq) ja puoliintumisaika $T_{1/2} = 5.271$ (vuotta). Voimme siis ratkaista hajoamisvakion $\lambda$ a)-kohdan avulla

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5.271} \quad \left(\frac{1}{\text{vuotta}}\right)$$

ja alkuarvon $N_0$ differentiaaliyhtälöstä

$$|N'(0)| = |-\lambda N(0)| \iff N_0 = N(0) = \frac{|N'(0)|}{\lambda} \quad (\text{Bq vuotta}).$$

Kun on kulunut 3 vuotta, koboltti-60-isotoopin aktiivisuus on

$$|N'(3)| = |-\lambda N(3)| = |-\lambda N_0 e^{-3\lambda}| = \left|-\lambda \frac{|N'(0)|}{\lambda} e^{-3\lambda}\right|$$
$$= 1.85 \cdot 10^{14}\, e^{-3\frac{\ln 2}{5.271}} = 1.2469\ldots \cdot 10^{14}.$$

Koska $|N'(3)| < 1.30 \cdot 10^{14}$ Bq, näyte ei ole käyttökelpoinen syöpähoitoon.

2. **Otetaan ilmanvastus huomioon** Ammutaan tykinkuula, jonka massa $m$ on 7 kg, pystysuoraan ilmaan. Kuulaan vaikuttavat voimat ovat painovoima $mg$ sekä kuulan nopeuden $v$ neliöön verrannollinen ilmanvastusvoima $kv^2$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$, $k = 0.0005$. Kun suunnaksi ylöspäin valitaan positiivinen $x$-akseli, dynamiikan peruslaista ($F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$) johdettu kuulan liikeyhtälö on alkuarvotehtävä:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \qquad v(0) = v_0 = 100\,\mathrm{m/s}.$$

a) Ratkaise alkuarvotehtävä eli kuulan nopeus $v(t)$, $t \geq 0$.

b) Ratkaise tykinkuulan liikerata $x(t)$, kun $x(0) = 0$.

c) Määritä a)- ja b)-kohtien avulla tykinkuulan saavuttama maksimikorkeus $x_{max}$.

[Vinkki b)-kohtaan: huomaa että määritelmän mukaan: $x'(t) = v(t)$]

[Vinkki c)-kohtaan: Tykinkuulan liikeradan lakipisteessä tapahtuu jotain, josta on mahdollista saada lisäinformaatiota.]

*Ratkaisu:* a) Differentiaaliyhtälö on separoituva ja voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^2.$$

Näin ollen

$$\int \frac{dv}{-g - \frac{k}{m}v^2} = \int dt = t + C \Leftrightarrow -\frac{1}{g}\int \frac{dv}{1 + (c_0 v)^2} = t + C$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{gc_0}\arctan(c_0 v) = t + C \Leftrightarrow \arctan(c_0 v) = -c_0 gt + C'$$
$$\Leftrightarrow v(t) = \frac{1}{c_0}\tan(-c_0 gt + C'),$$

jossa hyödynnettiin aikaisemmista harjoituksista tuttua tietoa $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ ja merkittiin $c_0 = \sqrt{\frac{k}{mg}}$ sekä $C' = -gc_0 C$, $C \in \mathbb{R}$. Lisäksi vakio $C'$ saadaan alkuehdosta $v(0) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan(C') = v_0$, johon sijoittamalla vakioiden lukuarvot

$$C' = \arctan(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0) \approx 0,26.$$

Siispä

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan(-\sqrt{\frac{gk}{m}}t + C')$$

ja likiarvoratkaisuksi saadaan $v(t) \approx 370,60\tan(-0,026t + 0,26)$.

b) Ratkaistaan kuulan liikerata $x(t)$ hyödyntämällä vihjettä $x'(t) = v(t)$ ja (a)-kohtaa (samoilla parametrien merkinnöillä):

$$x'(t) = v(t) \Leftrightarrow \int x'(t)dt = \int v(t)dt \Leftrightarrow x(t) - x(0) = x(t)$$
$$= \int \frac{1}{c_0}\tan(-c_0 gt + C')dt$$
$$= \frac{1}{c_0^2 g}\cdot\int c_0 g\tan(-c_0 gt + C')dt$$
$$= \frac{1}{c_0^2 g}(\ln|\cos(-c_0 gt + C')| + C''),$$

jossa vakion $C''$ arvoksi saadaan:

$$x(0) = \frac{1}{c_0^2 g}(\ln|\cos C'| + C'') = 0 \Leftrightarrow C'' = -\ln|\cos C'|.$$

Siis

$$x(t) = \frac{m}{k}(\ln|\cos(-\sqrt{\frac{gk}{m}}t + C')| + C''),$$

jossa $C' = \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)$ ja $C'' = -\ln|\cos(C')|$. Likiarvoratkaisu on

$$x(t) \approx 14 \cdot 10^3 \ln(1,036\cos(-0,026t + 0,26)).$$

c) Olkoon $t_1 > 0$ maksimikorkeutta vastaavaa ajanhetki eli $x(t_1) = x_{\text{max}}$. Tällöin $v(t_1) = 0$. Ratkaistaan ensin $t_1$ edellisestä yhtälöstä ja sijoitetaan se (b)-kohdassa saatuun liikeradan lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \sqrt{\frac{mg}{k}}\tan(-\sqrt{\frac{gk}{m}}t_1 + C')) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{gk}{m}}t_1 + C' = 0 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}}C' = \sqrt{\frac{m}{kg}}\arctan(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0) \approx 9,9565\,s. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} x_{\text{max}} = x(t_1) &= \frac{m}{k}(\ln|\cos(-C' + C')| + C'') = \frac{m}{k}C'' \\ &= -\frac{m}{k}\ln|\cos(\arctan(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0))| \approx 492\,m. \end{aligned}$$

3. **Lisääntyvästi lisääntyvät jänikset** Mallinnetaan jänispopulaation kasvua luentomonisteen luvun 2.2.1 malthusilaisella (eksponentiaalisella) mallilla. Merkitään alkupopulaation kooksi $N_0$. Populaatio kasvoi ensin Malthusin parametrilla $r = 0.03$, kunnes yllättäen hetkellä $T$ kuukautta parametri olikin $r = 0.05$. Kun yhteensä 20 kuukautta on kulunut, populaatio on kaksinkertaistunut alkuperäisestä. Selvitä hetki $T$.

   [Vinkki: ratkaise yhtälö $N' = 0.03N$ ensin alueessa $[0, T]$, josta saatu $N(T)$ on alkuehto ratkaisulle alueessa $[T, 20]$.]

   *Ratkaisu:* Merkitään $r_1 = 0.03$, $r_2 = 0.05$ ja $T_1 = 20$. Aikavälillä $[0, T]$ populaatio $N$ toteuttaa lineaarisen differentiaaliyhtälön $N' - r_1 N = 0$. Tämä voidaan ratkaista tavalliseen tyyliin: yhtälöllä on integroiva tekijä $e^{-\int r_1 dt} = e^{C_1}e^{-r_1 t}$ eli esimerkiksi funktio $e^{r_1 t}$. Nyt

$$0 = e^{-r_1 t}N' - r_1 e^{r_1 t}N = \frac{d}{dt}\left(Ne^{-r_1 t}\right),$$

   josta ratkaistaan $N = Ce^{r_1 t}$ jollain $C \in \mathbb{R}$. Kun tähän sijoitetaan $t = 0$, saadaan $N_0 = Ce^0$ eli $C = N_0$. Siis $N_T = N_0 e^{r_1 T}$.

   Vastaavanlaisella päättelyllä todetaan, että aikavälillä $[T, T_1]$ populaatio koko $N$ on muotoa $C'e^{r_2 t}$ jollain $C' \in \mathbb{R}$. Kun tähän sijoitetaan $t = T$, saamme

$$C'e^{r_2 T} = N_T = N_0 e^{r_1 T},$$

eli $C' = N_0 e^{(r_1-r_2)T}$. Toisaalta kun $t = T_1$, oletusten nojalla $N_{T_1} = 2N_0$, eli

$$2N_0 = \left(N_0 e^{(r_1-r_2)T}\right) e^{r_2 T_1} \Rightarrow 2e^{-r_2 T_1} = e^{(r_1-r_2)T},$$

josta ratkaistaan

$$T = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_2 T_1 - \ln(2)\right).$$

Kun tähän sijoitetaan tehtävän lukuarvot, saadaan

$$T = 50(1 - \ln(2)) \approx 15,343 \approx 15.$$

4. **RL-sarjavirtapiiri** Elektroniikassa käytettävän RL-virtapiirin (vastus ja käämi), virran $i$ (yksikkö A, ampeeri) käytöstä mallinnetaan differentiaaliyhtälöllä:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

jossa $R$ on vastus (yksikkö $\Omega$, ohmi), $L$ on käämin induktanssi (yksikkö H, henry). Jännite $E$ (yksikkö V, voltti) on:

$$E(t) = \begin{cases} E_0, & 0 \le \text{t} \le 20 \\ 0, & \text{t} > 20 \end{cases}$$

a) Ratkaise $i(t)$, $t \ge 0$, kun $i(0) = 0$.

b) Näytä, että

$$1) \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E_0}{L} \qquad \text{ja} \qquad 2) \quad i(t) \to 0, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

c) Jos b)-kohdan jälkimmäistä tulosta ($i(t) \to 0$) haluaa viivyttää/hidastaa, miten aidosti positiiviset parametrit $R$, $L$ kannattaa valita? Lyhyt perustelu riittää.

[Vinkki a)-kohtaan: $E(t)$ on määritelty paloittain, ratkaise $i(t)$ kahdessa määrittelyalueessa $I = [0, 20]$ ja $I' = [20, \infty)$. Tällöin ensimmäisen alueen ratkaisusta pisteessä $t = 20$, $i(20)$, saadaan alkuehto ratkaisulle jälkimmäisessä alueessa.]

*Ratkaisu:*

a) Huomataan, että yhtälö saadaan perusmuotoiseksi lineaariseksiyhtälöksi jakamalla se puolittain induktanssilla $L$:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L}.$$

Tälle lineaariselle yhtälölle saamme integroivan tekijän $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L}\,dt} = e^{\frac{R}{L}t}$. Kun yhtälö kerrotaan puolittain integroivalla tekijällä ja integroidaan tämän jälkeen, saadaan:

$$\begin{aligned}
& & \frac{di}{dt}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}ie^{\frac{R}{L}t} &= \frac{E(t)}{L}e^{\frac{R}{L}t} \\
\iff & & \int \frac{di}{dt}e^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}ie^{\frac{R}{L}t}\,dt &= \int \frac{E(t)}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt \\
\iff & & ie^{\frac{R}{L}t} &= \frac{E(t)}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\iff & & i(t) &= \frac{E(t)}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Kun vielä huomioidaan jännitteen $E(t)$ paloittainen määritelmä, saadaan:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{R} + C_1 e^{-\frac{R}{L}t} & t \in [0, 20]; \\ C_2 e^{-\frac{R}{L}t} & t > 20. \end{cases}$$

Vinkkiä noudattaen, ratkaistaan ensin vakio $C_1$ alkuarvosta $t(0) = 0$:

$$i(0) = \frac{E_0}{R} + C_1 e^{-\frac{R}{L}0} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{E_0}{R}.$$

Ratkaisun $i(t)$ halutaan olevan jatkuva, joten ratkaistaan $C_2$ käyttäen arvoa $i(20)$ alkuarvona ratkaisulle $i(t)$, kun $t > 20$:

$$\begin{aligned} i(20) =& C_2 e^{-\frac{R}{L}t} \iff \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}20} = C_2 e^{-\frac{R}{L}20} \\ \iff& C_2 = \frac{E_0}{R}(e^{\frac{R}{L}20} - 1). \end{aligned}$$

Yhteenvetona:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}), & t \in [0, 20]; \\ \frac{E_0}{R}(e^{\frac{R}{L}20} - 1)e^{-\frac{R}{L}t}, & t > 20. \end{cases}$$

b) 1)

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{d}{dt}\left(\frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{L}.$$

2) Raja-arvo ratkaisulle $i(t)$, kun $t \to \infty$, saadaan esimerkiksi seuraavasti:

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{E_0}{R}(e^{\frac{R}{L}20} - 1)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{R}(e^{\frac{R}{L}20} - 1) \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{R}{L}t} = 0.$$

c) Derivaatan $i'(t) = \frac{E_0}{L}(1 - e^{\frac{R}{L}20})e^{-\frac{R}{L}t}$, kun $t > 20$, arvot ovat negatiivisia kaikilla positiivisilla $R, L \in \mathbb{R}$. Derivaatan itseisarvoa, eli virran heikkenemisnopeutta, saadaan pienemmäksi, mikäli eksponentissa esiintyvää suhdetta $\frac{R}{L}$ pienennetään. Fyysikolle tämä tarkoittanee heikompien vastuksien ja suurihenryisemmän käämin etsintää koevälinevarastosta.

5. **Newtonilainen gravitaatio** *Huomautus: Tehtävänantoa täsmennetty alkuperäisestä.* Kahden kappaleen, joiden massat ovat $m_1$ ja $m_2$, toisiinsa kohdistama painovoima on Newtonin gravitaatioteorian mukaan kappaleiden etäisyyden neliöön kääntäen verrannollinen, ja vaikuttaa kappaleet toisiinsa yhdistävällä janalla. Gravitaatiolle voidaan johtaa gravitaatiopotentiaalista differentiaaliyhtälö

$$G\, m_1 m_2 \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

jossa $x$ ja $y$ ovat $m_1$-massaisen kappaleen koordinaatit, ja $m_2$-massainen kappale on asetettu origoon. $G$ on Newtonin gravitaatiovakio.

a) Osoita että kyseinen differentiaaliyhtälö on eksakti ja etsi potentiaali $F$ sekä implisiittiset ratkaisut $F(x, y(x)) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Hyvä ystäväsi Jarmo tekee ns. baumgartnerit ja päättää hypätä monikansallisen energiajuomayrityksen mainosasuun verhoutuneena laskuvarjohypyn noin 40 km korkeudelta stratosfääristä. Mikäli tapahtuukin pahin mahdollinen ja odottamattoman vahva aurinkotuuli pyyhkäisee Jarmon Maata kiertävälle radalle, tunnistatko ratkaisujen implisiittimuodosta miltä Jarmon ratakäyrät näyttäisivät $(x, y(x))$-tasossa?

*Ratkaisu:* Jakamalla turhat vakiot pois saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} y' = 0.$$

(a) Yhtälö on muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, missä $M(x,y) = x(x^2+y^2)^{-3/2}$ ja $N(x,y) = y(x^2+y^2)^{-3/2}$. Osittaisderivaatat laskemalla saadaan

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \cdot (-3/2)(x^2+y^2)^{-5/2} \cdot 2y = \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

joten yhtälö on origo poislukien eksakti koko tasossa.
Potentiaalifunktioksi saadaan

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,dx \\ &= \int x(x^2+y^2)^{-3/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+y^2)^{-3/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2)(x^2+y^2)^{-1/2} + g(y) \\ &= -(x^2+y^2)^{-1/2} + g(y), \end{aligned}$$

ja $g$ saadaan ratkaistua ehdosta $\frac{\partial F}{\partial y} = N$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= -(-1/2) \cdot (x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2y + g'(y) \\ &= \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + g'(y) \\ &= N(x,y) + g'(y), \end{aligned}$$

eli täytyy olla $g'(y) = 0$, joten sopii valita $g(y) = 0$.
Siten potentiaalifunktioksi saadaan

$$F(x,y) = -(x^2+y^2)^{-1/2},$$

ja differentiaaliyhtälön implisiittiratkaisu on

$$-(x^2+y^2)^{1/2} = r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

(b) Korottamalla implisiittiratkaisu puolittain neliöön saadaan

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

eli ratakäyrät ovat ympyröitä. Lisättäköön että mallia voidaan tietyin varauksin pitää validina kierrettäessä Maata suhteellisen läheltä, ja sopivalla ratanopeudella. Yleisempi Newtonilaisen gravitaation mallintaminen differentiaaliyhtälöillä on esitetty esimerkiksi opetusmonisteen luvussa 3.6.