HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 3 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 8.–10.2.2017.

Tehtäväsarja I

Tehtäväsarjassa ratkaistaan ensimmäisen kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä.

1. Ratkaise alkuarvo-ongelmat

$$\text{a)}\quad y' + 4y - e^{-x} = 0, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \qquad \text{b)}\quad xy' + 2y = x^3, \quad y(1) = 1.$$

Ratkaisu: a) Yhtälö on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jolla $p(x) = 4,\ q(x) = e^{-x}$. Sen integroiva tekijä on

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\right) = \exp\left(\int 4\right) = C_1 e^{4x}$$

jollakin $C_1 > 0$ ja voidaan valita esimerkiksi $C_1 = 1$ eli $\mu(x) = e^{4x}$.

Nyt kerrotaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö puolittain integroivalla tekijällä

$$\begin{aligned} e^{3x} = e^{4x}\, e^{-x} = &\ \boxed{\mu(x)\, e^{-x} = \mu(x)\, y'(x) + \mu(x)\, 4y(x)} \\ &= e^{4x}\, y'(x) + 4e^{4x}\, y(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{4x}\, y(x)\right), \end{aligned}$$

josta saadaan integroimalla ratkaisuksi

$$y(x) = \frac{1}{e^{4x}} \int e^{3x}\, dx = e^{-4x}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right) = \frac{1}{3}e^{-x} + C\, e^{-4x}.$$

Ratkaisun yhtälön saa myös muistaa (sitä siis ei tarvitse joka kerta integroida).

Alkuarvo-ongelman ratkaisuksi saadaan: $\frac{4}{3} = y(0) = \frac{1}{3} + C$ eli $C = 1$ ja

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + e^{-4x}.$$

b) Yhtälö on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka standardi muoto on

$$y' + \frac{2}{x}\, y = x^2, \qquad x \neq 0,$$

eli $p(x) = \frac{2}{x}$ ja $q(x) = x^2$. Sen integroiva tekijä on muotoa

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\right) = \exp\left(\int \frac{2}{x}\right) = C_1 \exp\left(2 \ln|x|\right) = C_1\, x^2$$

ja voidaan valita integroivaksi tekijäksi $\mu(x) = x^2$.

Nyt kerrotaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö puolittain integroivalla tekijällä

$$x^4 = x^2\, y' + 2x\, y = \frac{d}{dx}\left(x^2\, y\right),$$

josta saadaan integroimalla ratkaisuksi

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\int x^4 dx = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right) = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}.$$

Alkuarvo-ongelman ratkaisuksi saadaan: $1 = y(1) = \frac{1}{5} + C$ eli $C = \frac{4}{5}$ ja

$$y(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{4}{5x^2}, \qquad x > 0.$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(x-2)y' - y = 2(x-2)^3.$$

Ratkaisu: Yhtälö on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka standardi muoto on

$$y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2, \qquad x \neq 2,$$

eli $p(x) = -\frac{1}{x-2}$ ja $q(x) = 2(x-2)^2$. Sen integroiva tekijä on muotoa

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\right) = \exp\left(\int -\frac{1}{x-2}\right) = C_1 \exp\left(-\ln|x-2|\right) = C_1\frac{1}{|x-2|}$$

ja voidaan valita integroivaksi tekijäksi $\mu(x) = \frac{1}{|x-2|}$.

Oletetaan ensin, että $x > 2$. Nyt kerrotaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö puolittain integroivalla tekijällä

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2}y' - \frac{1}{(x-2)^2}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-2}y\right),$$

josta saadaan integroimalla ratkaisuksi

$$y(x) = (x-2)\int 2(x-2)dx = (x-2)\left((x-2)^2 + C\right) = (x-2)^3 + C(x-2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vastaavasti, kun $x < 2$,

$$y(x) = -(x-2)\int -2(x-2)dx = (x-2)\left((x-2)^2 + C\right) = (x-2)^3 + C(x-2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eli differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$y(x) = (x-2)^3 + C(x-2), \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{kun } x > 2 \text{ ja } x < 2,$$

sijoittamalla yhtälöön nähdään, että ratkaisu toimii myös, kun $x = 2$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x.$$

Ratkaisu: Yhtälö on standardi muotoinen ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö.

Yhtälön integroiva tekijä on muotoa

$$\mu(x) = e^{\int \cos(x)\, dx} = e^{\sin(x)+C}.$$

Valitsemalla $C = 0$, saamme integroivaksi tekijäksi $\mu(x) = e^{\sin(x)}$.

Kerrotaan yhtälö puolittain integroivalla tekijällä ja integroidaan saatu yhtälö muuttujan x suhteen (oikealla puolella integroidaan osittain):

$$
\begin{aligned}
& \int e^{\sin(x)} y'(x) + e^{\sin(x)} y(x) \cos x \, dx = \int e^{\sin(x)} (\sin x \cos x) \, dx \\
\iff \quad & \int \frac{d}{dx} \left(e^{\sin(x)} y(x) \right) \, dx = \int e^{\sin(x)} (\sin x \cos x) \, dx \\
\iff \quad & e^{\sin(x)} y(x) = e^{\sin(x)} \sin(x) - \int e^{\sin(x)} \cos x \, dx \\
\iff \quad & e^{\sin(x)} y(x) = e^{\sin(x)} (\sin(x) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Nyt saamme ratkaisun:

$$y(x) = \sin(x) - 1 + Ce^{-\sin(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tehtäväsarja II

Tehtäväsarjassa tutustutaan sijoituksiin ja muunnoksiin.

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Ratkaisu: Tehtävän yhtälö on tasa-asteinen, sillä kun määritellään $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x - y$, niin differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, ja tähän sijoitettu parametri $a \in \mathbb{R}$ saadaan samalla potenssilla tulon tekijäksi:

$$\frac{f(ax, ay)}{g(ax, ay)} = \frac{ax + ay}{ax - ay} = \frac{a(x + y)}{a(x - y)}.$$

Luentomonisteen kohdan 1.5.2 perusteella tiedetään, että tasa-asteinen yhtälö palautuu aina separoituvaksi yhtälöksi sijoituksella: $z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = z(x)x$, ja $y'(x) = z + xz'(x)$. Muokataan ensin alkuperäinen yhtälö helpompaan muotoon:

$$y' = \frac{1 + y/x}{1 - y/x},$$

johon tehdään yllä mainittu sijoitus:

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow xz' = \frac{z^2+1}{1-z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z'(1-z)}{z^2+1} = \frac{1}{x},$$

joka on separoituva yhtälö, kuten luvattua. Integroidaan lauseke puolittain:

$$\int \frac{dz}{z^2+1} - \int \frac{zdz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \arctan z - \frac{1}{2} \ln(z^2+1) = \ln|x| + C,$$

ja $C \in \mathbb{R}$. Vasemmalta ensimmäinen ja kolmas integraali ovat jo kurssilta vanhoja tuttuja, ja toinen palautui alkeisfunktion integraaliksi sijoituksella $u = z^2 + 1$, ja $dz = \frac{du}{2z}$, eli huomaamalla että osoittajassa on vakiota vaille nimittäjän derivaatta. Sijoitetaan vielä alkuperäinen muunnos, niin saadaan yhtälön implisiittiratkaisuksi:

$$\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y(x)^2}{x^2} + 1\right) = \ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y' = (x - y + 1)^2.$$

Ratkaisu: Tehdään luonnollinen sijoitus $u = x - y + 1$, eli

$$y = x - u + 1,$$

josta y:n derivaataksi saadaan $y' = 1 - u'$. Kun sijoitus tehdään alkuperäiseen yhtälöön, saadaan yhtälö muotoon

$$1 - u' = u^2.$$

Kyseessä on siis separoituva yhtälö $u' = 1 - u^2$. Sillä on triviaaliratkaisut $u \equiv \pm 1$, ja muut ratkaisut saadaan integroimalla

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \int 1\,dx.$$

Lasketaan vasemman puolen lausekkeelle osamurtohajotelma. Koska $1 - u^2 = (1 + u)(1 - u)$, niin löytyy vakiot A ja B, joilla

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+u)(1-u)} &= \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \\ &= \frac{A(1-u) + B(1+u)}{(1+u)(1-u)} \\ &= \frac{(B-A)u + B + A}{(1+u)(1-u)}. \end{aligned}$$

Jotta lausekkeet ovat samat, täytyy siis päteä

$$1 = (B - A)u + B + A \tag{1}$$

kaikilla u. Tästä voidaan ratkoa A:lle ja B:lle arvot monellakin eri tapaa:

(a) Yhtälön (1) molemmat puolet ovat polynomeja, ja kaksi polynomia ovat samat tasan silloin kun niillä on samat kertoimet. Siten vertaamalla 1:n ja u:n kertoimia saadaan yhtälöt
$$\begin{cases} 1 = B + A \\ 0 = B - A \end{cases}$$
josta saadaan ratkaisu $A = B = 1/2$.

(b) Muuttujaan u voidaan sijoittaa arvoja, jolloin saadaan lineaarinen yhtälöryhmä josta A ja B ratkaistaan. Sijoittamalla yhtälöön (1) esimerkiksi arvot $u = 0$ ja $u = 2$ saadaan yhtälöt
$$\begin{cases} 1 = B + A \\ 1 = 3B - A \end{cases}$$
josta voidaan ratkaista $A = B = 1/2$.

(c) Sijoituskeino on erityisen tehokas kirjoittamalla yhtälö (1) takaisin muotoon $1 = A(1-u) + B(1+u)$. Kun nyt muuttujaan u sijoitetaan vuorottain jokaisen tekijän nollakohta, voidaan kyseisen tekijän kerroin ratkaista suoraan.

Esimerkiksi kun $u = 1$, niin $A(1 - u) = 0$, jolloin voidaan ratkaista

$$B = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

ja kun sijoitetaan $u=-1$, niin B:n termi katoaa, ja saadaan

$$A=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}.$$

Muunnetun differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis

$$\begin{aligned}
& & \int\left(\frac{1/2}{1+u}+\frac{1/2}{1-u}\right)du &= \int 1\,dx & \\
&\Longrightarrow & \frac{1}{2}(\ln|1+u|-\ln|1-u|) &= x+C_1, & C_1\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow & \ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} &= x+C_1 & \\
&\Longrightarrow & \sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} &= C_2e^x, & C_2>0\\
&\Longrightarrow & \left|\frac{1+u}{1-u}\right| &= C_3e^{2x}, & C_3>0\\
&\Longrightarrow & \frac{1+u}{1-u} &= C_4e^{2x}, & C_4\neq 0\\
&\Longrightarrow & 1+u &= C_4e^{2x}(1-u) & \\
&\Longrightarrow & (1+C_4e^{2x})u &= C_4e^{2x}-1 & \\
&\Longrightarrow & u &= \frac{C_4e^{2x}-1}{C_4e^{2x}+1}. &
\end{aligned}$$

Koska valinnalla $C_4=0$ saadaan eräs triviaaliratkaisuista, $u\equiv -1$, voidaan sallia vakiolle myös arvo 0. (Toinen triviaaliratkaisu $u\equiv 1$ vastaa tavallaan tapausta $C_4\to\infty$.)

Täysi ratkaisu on siten

$$u\equiv 1,\ \text{tai}\ u=\frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1},\quad C\in\mathbb{R},$$

ja alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$\begin{aligned}
y &= x-u+1\\
&= x-\frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}+1,\quad C\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

tai $y=x-1+1=x$.

6. a) Harjoitusten 1 ja 2 tehtävissä 6 tutustuttiin jo differentiaaliyhtälöön

$$y^2+2xy-x^2y'=0.$$

Ratkaise se nyt Bernoullin yhtälönä.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$-3y'-\frac{2x}{1+x^2}\,y=y^4\,(1+x^2)\tan x.$$

Ratkaisu: a) Yhtälö on muotoa $y' - \frac{2y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$, kun $x \neq 0$. Se vastaa Bernoullin yhtälöä $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^\lambda$, jossa $\lambda = 2$ sekä $p(x) = -\frac{2}{x}$ ja $q(x) = \frac{1}{x^2}$ ovat jatkuvia, kun $x \neq 0$. Tällä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0$ kaikilla $x \neq 0$, sillä $\lambda = 2 > 0$ (Huom. alkuperäisen yhtälön triviaaliratkaisu on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$). Muut ratkaisut saadaan seuraavasti. Jaetaan yhtälö luvulla $y(x)^2 \neq 0$, jolloin

$$y^{-2}y' - \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

Tehdään yhtälöön (2) sijoitus $z(x) = y(x)^{1-\lambda} = y(x)^{-1}$, jolloin $z'(x) = -y(x)^{-2}y'(x)$. Näin ollen yhtälö (2) saadaan muotoon $-z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$ eli $z' + \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x^2}$. Tämä on 1. kertaluvun lineaarinen yhtälö, jonka voi ratkaista esimerkiksi integroivan tekijän $\mu(x) = \exp\left(2\int \frac{dx}{x}\right) = \exp(2\ln|x|) = x^2$ avulla:

$$\begin{aligned} &z' + \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 z' + 2xz = -1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 z\right) = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 z = -\int 1dx = -x + C \Leftrightarrow z = \frac{C-x}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{C-x}, \end{aligned}$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $x \neq C$, jossa $C \in \mathbb{R}$. Siispä alkuperäisellä yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$ ja muut ratkaisut $y(x) = \frac{x^2}{C-x}$ kaikilla $x \neq 0$ ja $x \neq C$.

b) Yhtälö vastaa Bernoullin yhtälöä $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^\lambda$, jossa $\lambda = 4$ sekä $p(x) = \frac{2x}{3(1+x^2)}$ ja $q(x) = -\frac{1}{3}(1+x^2)\tan(x)$ ovat jatkuvia, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y(x) = 0$ kaikilla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Muut ratkaisut saadaan jakamalla luvulla $y(x)^4$ ja tekemällä sijoitus $z(x) = y(x)^{-3}$, jolloin

$$y'y^{-4} + \frac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3} = -\frac{1}{3}(1+x^2)\tan(x) \Leftrightarrow z' - \frac{2x}{1+x^2}z = (1+x^2)\tan(x).$$

Kerrotaan viimeinen yhtälö integroivalla tekijällä

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{2x}{(1+x^2)}dx\right) = \exp(-\ln(1+x^2)) = \frac{1}{1+x^2}:$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+x^2}z' - \frac{2x}{(1+x^2)^2}z = \tan(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}z\right) = \tan(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}z = \int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\ln|\cos(x)| + C \\ &\Leftrightarrow z = -(1+x^2)\ln|\cos(x)| + C(1+x^2) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{-(1+x^2)\ln|\cos(x)| + C(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)(C - \ln|\cos(x)|)}}, \end{aligned}$$

jossa $C \in \mathbb{R}$ ja $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (sekä $|\cos(x)| \neq e^C$).