HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 2 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 1.–3.2.2017.

1. Laske funktion f osittaisderivaatat $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, kun

$$\text{a)}\quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2y^3+1} \qquad \text{b)}\quad f(x,y) = e^{\sin(xy)} + \ln(1+x^2y^2)$$

Ratkaisu:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(x^2y^3+1) - 2x^2y^5}{(x^2y^3+1)^2} = \frac{y^2 - x^2y^5}{(x^2y^3+1)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2xy(x^2y^3+1) - 3x^3y^4}{(x^2y^3+1)^2} = \frac{2xy - x^3y^4}{(x^2y^3+1)^2}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{\sin(xy)}\, y\, \cos(xy) + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{\sin(xy)}\, x\, \cos(xy) + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$

2. Näytä, että yhtälö

$$y - 3x^2 + (x-1)y' = 0$$

on eksakti ja ratkaise se.

Ratkaisu: Yhtälö on muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, missä $M(x,y) = y - 3x^2$ ja $N(x,y) = x - 1$. Nyt

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Siispä yhtälö on Lauseen 1.10 mukaan eksakti koko tasossa.

Määritetään seuraavaksi yhtälön potentiaali kaavasta:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)\,ds = \int_{x_0}^{x} y - 3t^2\,dt + \int_{y_0}^{y} x - 1\,ds.$$

Asettamalla $x_0 = 1$, saamme edelleen:

$$F(x,y) = \int_{1}^{x} y - 3t^2\,dt + \int_{y_0}^{y} 0\,ds = xy - x^3 - y + 1.$$

Ratkaistaan seuraavaksi y kaavasta $F(x,y) = C_1$:

$$F(x,y) = C_1 \iff xy - x^3 - y + 1 = C_1 \iff (x-1)y = x^3 + C$$
$$\iff y = \frac{x^3}{x-1} + \frac{C}{x-1}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

Yllä olemme siis määritelleet ratkaisut $y(x) = \frac{x^3}{x-1} + \frac{C}{x-1}$, kaikille $x \neq 1$, missä $C \in \mathbb{R}$.

3. Näytä, että yhtälö

$$\frac{1}{y} + \left(2y - \frac{x}{y^2}\right) y' = 0$$

on eksakti ja ratkaise se.

Ratkaisu: Tehtävän yhtälö on muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, jossa $M(x,y) = \frac{1}{y}$, $N(x,y) = 2y - \frac{x}{y^2}$. Todetaan ensin, että koska $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ (myös $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$) on epäjatkuva kaikissa tason $\mathbb{R}^2$ pisteissä $(x,y) = (x,0)$, niin yhtälö ei voi olla eksakti koko tasossa $\mathbb{R}^2$. Edellä lasketut osittaisderivaatat ovat samat kuin lauseessa 1.10 (eksaktisuuslause):

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Valitaan alueeksi avoin ja reiätön $D = \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Tällöin eksaktisuusehto pätee kaikilla $(x,y) \in D$, ja eksaktisuuslauseen mukaan yhtälö on eksakti. Huomaa, että aivan yhtä pätevä valinta olisi alue $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$.

Etsitään ratkaisu implisiittimuodossa $F(x,y) = C$, jossa $C \in \mathbb{R}$. Potentiaali F voidaan voidaan ratkaista suoraan määritelmästä 1.9. esimerkiksi seuraavasti:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\, dx + g(y) = \int \frac{1}{y}\, dx + g(y) = \frac{x}{y} + g(y),$$

ja $g(y)$ ratkaistaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \\ \Leftrightarrow -\frac{x}{y^2} + g'(y) &= 2y - \frac{x}{y^2} \\ \Leftrightarrow g'(y) &= 2y \\ \Leftarrow g(y) &= y^2, \end{aligned}$$

ja sijoittamalla tämä takaisin F:n lausekkeeseen saadaan ratkaisuksi:

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + y^2 = C, \text{ kaikilla } (x,y) \in D,\ C\mathbb{R}.$$

4. Näytä, että yhtälö

$$e^x(y - x) + (1 + e^x)y' = 0$$

on eksakti ja ratkaise se.

Ratkaisu: Yhtälö on muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, missä $M(x,y) = e^x(y-x)$ ja $N(x,y) = (1 + e^x)$. Koska osittaisderivaatiolle pätee

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

niin yhtälö on Lauseen 1.10 mukaan eksakti koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

Ratkaistaan potentiaalifunktio F integroimalla funktiota N, sillä se on M:ää yksinkertaisempi, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int N(x,y)\, dy + g(x) \\ &= \int (e^x + 1)\, dy + g(x) \\ &= y(e^x + 1) + g(x). \end{aligned}$$

Ratkaistaan vielä tuntematon funktio $g(x)$ yhtälöstä $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$. Kun lasketaan $\frac{\partial F}{\partial x}$,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y(e^x+1)+g(x)\right) = ye^x + g'(x),$$

ja verrataan sitä funktion $M(x,y)$ lausekkeeseen,

$$M(x,y) = e^x(y-x) = ye^x - xe^x,$$

niin nähdään, että täytyy olla $g'(x) = -xe^x$. Funktion g lauseke saadaan tästä osittaisintegroimalla. Osittaisintegroinnin kaava on

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx,$$

missä valitaan $u(x) = -x$, sillä $-x$ muuttuu vakiokertoimeksi derivoitaessa, ja $v'(x) = e^x$, sillä e^x on helppo integroida. Siten saadaan

$$\begin{aligned} g(x) &= \int -xe^x\,dx \\ &= -xe^x - \int (-1)\cdot e^x\,dx \\ &= -xe^x + e^x \\ &= (1-x)e^x, \end{aligned}$$

joten lopullinen potentiaalifunktio on $F(x,y) = y(e^x+1)+(1-x)e^x$, ja differentiaaliyhtälön implisiittiratkaisu on

$$y(e^x+1)+(1-x)e^x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tästä voidaan halutessa vielä ratkaista y eksplisiittisesti vaikkapa muotoon

$$y = \frac{C-(1-x)e^x}{e^x+1} = \frac{Ce^{-x}+x-1}{1+e^{-x}}.$$

5. Etsi integroiva tekijä ja ratkaise differentiaaliyhtälö

$$3xy + y^2 + (x^2+xy)y' = 0.$$

Ratkaisu: Olkoot $M(x,y) = 3xy+y^2$, $N(x,y) = x^2+xy$ ja $\mu(x,y)$ integroiva tekijä. Merkitään vielä $\widetilde{M}(x,y) = \mu(x,y)M(x,y)$ ja $\widetilde{N}(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$. Tällöin pätee, että yhtälö $\widetilde{M}+\widetilde{N}y' = 0$ on eksakti mahdollisesti jossakin (suorakaiteen muotoisessa, reiättömässä) tason alueessa D eli Lauseen 1.10 (eksaktisuuslause) nojalla on voimassa

$$\frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

kaikilla $(x,y) \in D$. Etsitään ensin integroiva tekijä μ. Tämän voi tehdä (ainakin) kolmella tavalla ja esitetään ne seuraavaksi ennen yhtälön ratkaisemista.

Alkuperäistä yhtälöä $M + Ny' = 0$ katsomalla voidaan havaita, että esimerkiksi $\mu(x) = x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, kelpaa integroivaksi tekijäksi, sillä tällöin $\widetilde{M}(x,y) = 3x^2y+xy^2$ ja $\widetilde{N}(x,y) = x^3+x^2y$, joille

$$\frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} = 3x^2+2xy = \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x}$$

erityisesti kaikilla $(x, y) \in D$, jossa voidaan valita $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ tai $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. (Arvo $x = 0$ on jätetty pois, sillä nollalla kertominen ei tuota alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitävää yhtälöä).

Toinen tapa on lähteä liikkeelle ehdosta (1) ja olettaa ensin, että μ riippuu vain muuttujasta x kuten edellä (tai vaihtoehtoisesti vain muuttujasta y). Nyt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{M}(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial(3xy\mu(x) + y^2\mu(x))}{\partial y} = 3x\mu(x) + 2y\mu(x) \\ = \frac{\partial \widetilde{N}(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial(x^2\mu(x) + xy\mu(x))}{\partial x} = 2x\mu(x) + x^2\mu'(x) + y\mu(x) + xy\mu'(x),\end{aligned}$$

josta saadaan

$$(x+y)\mu(x) = (x^2 + xy)\mu'(x) \tag{2}$$

ja edelleen

$$\frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{1}{x} = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)},$$

kun $x^2 + xy \neq 0 \neq \mu(x)$. Siispä $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\mu}d\mu$, joten

$$\ln|\mu| = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow \mu(x) = \pm e^{C_1}x = Cx,$$

jossa $x \neq 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C = \pm e^{C_1} \neq 0$, ja integroivaksi tekijäksi käy esimerkiksi $\mu(x) = x$ (valinnalla $C = 1$). Huomaa, että $\mu(x) = Cx$ toteuttaa myös yhtälön (2).

Kolmas tapa on hyödyntää Lausetta 1.11 ja huomata, että lauseke

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2+xy}(3x + 2y - (2x+y)) = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{1}{x}$$

riippuu vain muuttujasta x. Näin ollen yhtälöllä $M + Ny' = 0$ on integroiva tekijä $\mu(x) = \exp(\int \frac{1}{x}dx) = \exp(\ln|x| + C_1) = Cx$, jossa $x \neq 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C = \pm e^{C_1}$, ja voidaan jälleen valita $\mu(x) = x$.

Ratkaistaan lopuksi alkuperäisen yhtälön $M + Ny' = 0$ kanssa alueessa D yhtäpitävä eksakti yhtälö

$$\widetilde{M} + \widetilde{N}y' = 0.$$

Sen potentiaalille F pätee erityisesti

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \widetilde{M}(x,y),$$

josta saadaan

$$F(x,y) = \int \widetilde{M}(x,y)dx + g(y) = \int (3x^2y + xy^2)dx + g(y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y).$$

Toisaalta

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 + x^2y + g'(y) = \widetilde{N}(x,y) = x^3 + x^2y$$

ja saadaan $g'(y) = 0$, joten voidaan valita $g(y) = 0$. Nyt ratkaisut ovat implisiittimuodossa $F(x,y) = C$ eli $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$. Halutessaan tästä saa eksplisiittiset ratkaisut

$$y = \frac{-x^3 + \sqrt{x^6 + C'x^2}}{x^2}$$

ja

$$y = \frac{-x^3 - \sqrt{x^6 + C'x^2}}{x^2},$$

jossa $x \neq 0$, $C' \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Eksakti yhtälö $\widetilde{M} + \widetilde{N}y' = 0$ on yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön $M + Ny' = 0$ kanssa (eli molemmilla on samat ratkaisut), kun $x \neq 0$. Jos vaaditaan, että ratkaisu y on määritelty myös pisteessä $x = 0$ saadaan implisiittimuotoon

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = C$$

sijoittamalla $x = 0$, että $C = 0$. Ratkaisemalla nyt yhtälö

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = x^2 y \left(x + \frac{1}{2}y\right) = 0$$

saadaan $y(x) = 0$ tai $y(x) = -2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nämä kaksi ratkaisua ovat yhtälön $M + Ny' = 0$ ainoat kaikilla $x \in \mathbb{R}$ määritellyt ratkaisut.

6. Harjoitusten 1 tehtävässä 6 osoitettiin, että differentiaaliyhtälö

$$y^2 + 2xy - x^2 y' = 0$$

ei ole eksakti.

a) Etsi vain y:stä riippuva integroiva tekijä $\mu(y)$ siten, että differentiaaliyhtälö

$$\mu(y)\, y^2 + \mu(y)\, 2xy - \mu(y)\, x^2 y' = 0$$

on eksakti.

b) Mikä on saadun eksaktin yhtälön implisiittinen ratkaisu?

c) Onko alkuperäinen yhtälö ekvivalentti eksaktin version kanssa eli onko molemmilla yhtälöillä samat ratkaisut?

Ratkaisu:

a) Seurataan lausetta 1.11. Lauseen merkinnöillä differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $M(x,y) + N(x,y)y'$, missä $M(x,y) = y^2 + 2xy$ ja $N(x,y) = -x^2$, ja selvästikin $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Jos funktio

$$g(y) := \frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \right)$$

riippuu vain y:stä, on yhtälöllä integroiva tekijä $\exp\left(\int g(y)dy\right)$. Lyhyt lasku osoittaa, että $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial(-x^2)}{\partial x}(x,y) = -2x$ ja $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(y^2+2xy)}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x$, joten

$$g(y) = \frac{1}{y^2 + 2xy}\left((-2x) - (2y + 2x)\right) = -\frac{2}{y}.$$

Täten lauseen 1.11 ehdot täyttyvät ja integroivaksi tekijäksi voidaan valita

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) = \exp\left(\int -\frac{2}{y}dy\right) = e^{-2\ln|y| + C} = e^C \frac{1}{y^2},$$

mielivaltaisella vakiolla C, eli esimerkiksi y^{-2}.

Samaan lopputulokseen päädettäisiin, jos lähdettäisiin laskemaan, millä funktiolla μ eksaktisuuslauseen 1.10 ehto täyttyy, eli milloin pätee

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right).$$

Tästä päädytään differentiaaliyhtälöön $\mu'(y) = g(y)\mu(y)$, jonka ratkaisut tosiaan ovat muotoa $\exp\left(\int g(y)dy\right)$. Lisäksi jos sopivan integroivan tekijän yhtälöstä tavalla tai toisella arvaa tai näkee, voi arvauksensa tarkistaa eksaktisuuslauseella. Tässä tapauksessa valinnalla $\mu(y) = y^{-2}$ saamme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right) = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right),$$

joten se tosiaankin tekee yhtälöstä eksaktin.

b) Ratkaistaan uusi eksakti yhtälö $\widetilde{M}(x,y)+\widetilde{N}(x,y)y' := \mu(y)M(x,y)+\mu(y)N(x,y)y' = 1+\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}y' = 0$ etsimällä potentiaali F eksaktisuuslauseen 1.10 tyyliin. Kaavan (1.25) nojalla nimittäin eksaktin yhtälön potentiaaliksi saadaan

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \widetilde{M}(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} \widetilde{N}(x_0,t)dt,$$

ainakin kaikissa suorakulmion muotoisissa reiättömissä alueissa. Jos valitaan $x_0 = 0$ ja y_0 mielivaltaisesti, saamme

$$F(x,y) = \int_{0}^{x} \left(1+\frac{2s}{y}\right) ds + \int_{y_0}^{y} 0dt = x + \frac{x^2}{y} + C,$$

eli differentiaaliyhtälön implisiittinen ratkaisu on

$$x + \frac{x^2}{y} = C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

c) Ei. Alkuperäisellä yhtälöllä on selvästikin vakioratkaisu $y \equiv 0$. Tämä ei ole kuitenkaan eksaktin version ratkaisu, sillä yhtälöä ei ole edes määritelty kun $y = 0$.