HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus 1 – Ratkaisuehdotuksia

Seuraavat tehtävät käsitellään laskuharjoituksissa 25.–27.1.2017.

1. Etsi differentiaaliyhtälön $y''(x) - \cos x - 3 = 0$ yleinen ratkaisu. Mikä näistä ratkaisuista toteuttaa alkuarvo-ongelman $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$?

   Ratkaisu: $y''(x) = \cos x + 3$, joten

   $$y'(x) = \int (3 + \cos x) dx = 3x + \sin x + C_1,$$

   missä $C_1 \in \mathbb{R}$ ja edelleen

   $$y(x) = \int y'(x) dx = \int (3x + \sin x + C_1) dx = \frac{3}{2}x^2 - \cos x + C_1 x + C_2,$$

   missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   Yleinen ratkaisu on siis

   $$y(x) = \frac{3}{2}x^2 - \cos x + C_1 x + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Ratkaistaan vielä alkuarvo-ongelma. Jos $y'(0) = 1$, niin $1 = y'(0) = 0 + \sin 0 + C_1$ eli $C_1 = 1$. Kun lisäksi $y(0) = 1$, niin $1 = y(0) = 0 - \cos 0 + 0 + C_2$ eli $C_2 = 2$.

   Alkuarvo-ongelman ratkaisu on

   $$y(x) = \frac{3}{2}x^2 - \cos x + x + 2.$$

2. Todista epäsuorasti, että differentiaaliyhtälö $y' = \sin(x + y)$ ei ole separoituva, eli kirjoita differentiaaliyhtälö muodossa $y' = p(x)q(y)$ ja näytä, että tämä ei voi pitää paikkaansa kaikilla (x, y), jotka kuuluvat funktion $\sin(x + y)$ määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}^2$.

   Ratkaisu: Todistetaan että yhtälö $y' = \sin(x + y) = f(x, y)$ ei ole separoituva. Tehdään vastaoletus: yhtälö on separoituva, joten se voidaan kirjoittaa muodossa $y' = p(x)q(y)$, kaikilla (x, y), jotka kuuluvat f:n määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}^2$. Yritetään etsiä nämä funktiot $p(x)$ ja $q(y)$.

   Koska oletuksen mukaisesti $\sin(x + y) = p(x)q(y)$, valitaan ensin $x = 0$, jolloin

   $$q(y) = \frac{\sin(y)}{p(0)},$$

   jossa $p(0) \neq 0$, sillä $\sin(y)$ ei ole nolla kaikilla $y \in \mathbb{R}$ (esimerkiksi $\sin(\pi/2) = 1$). Sijoittamalla tämä $q(y)$ yhtälöön $\sin(x + y) = p(x)q(y)$ saadaan

   $$\sin(x + y) = \frac{p(x)\sin(y)}{p(0)},$$

   ja tarkastelemalla pistettä $y = 0$:

   $$\sin(x) = \frac{p(x)\sin(0)}{p(0)}.$$

Koska $\sin(0) = 0$, ylläolevan perusteella $\sin(x) = 0$ kaikilla x, $p(x)$:n valinnasta riippumatta. Tämä ei päde, sillä esimerkiksi $\sin(\pi/2) = 1$.

Koska vastaoletuksen mukaisesti $p(x)q(y)$ tuli olla $f(x,y)$ kaikilla (x,y), on päädytty ristiriitaan. Siis yhtälö $y' = \sin(x+y)$ ei ole separoituva.

Vaihtoehtoinen ratkaisuehdotus: Valitsemalla $x = 0, y = \pi/2$ saadaan

$$p(0)q(\pi/2) = \sin(0 + \pi/2) = 1,$$

eli $p(0) \neq 0$. Samoin valitsemalla $x = \pi/2, y = 0$ saadaan $q(0) \neq 0$. Tällöin täytyisi päteä

$$0 \neq p(0)q(0) = \sin(0+0) = 0,$$

mikä on ristiriita. Siten yhtälö ei ole separoituva.

3. Mikä on differentiaaliyhtälön $y'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{y^2}$ yleinen ratkaisu? Mikä ratkaisuista toteuttaa alkuarvo-ongelman $y(0) = -1$?

Ratkaisu: Yhtälö on separoituva valitsemalla $p(x) = \sqrt{x} - 1$, $q(y) = \frac{1}{y^2}$.

Huomioidaan ensin ratkaisualueesta, että täytyy olla $x \geq 0$, sillä x esiintyy neliöjuuren alla, ja täytyy olla $y \neq 0$, sillä y:llä jaetaan. Yhtälön ratkaisukäyrät kulkevat siis oikeassa puolitasossa, joko x-akselin ylä- tai alapuolella.

Yhtälöllä ei ole triviaaliratkaisuja, sillä $q(y) \neq 0$ kaikilla y. Etsitään sitten yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{x}-1}{y^2} \\
\Leftrightarrow\ y^2\,dy &= (\sqrt{x}-1)\,dx \\
\Leftrightarrow\ \int y^2\,dy &= \int (x^{1/2}-1)\,dx \\
\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}y^3 &= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + C'
\end{aligned}$$

josta ratkaistaan $y(x) = \sqrt[3]{2x^{3/2} - 3x + C}$, missä $C = 3C' \in \mathbb{R}$.

Alkuarvoehdosta $y(0) = -1$ saadaan

$$-1 = y(0) = \sqrt[3]{2 \cdot 0^{3/2} - 3 \cdot 0 + C} = \sqrt[3]{C},$$

eli täytyy olla $C = (-1)^3 = -1$, ja alkuarvoehdon toteuttava ratkaisukäyrä on $y(x) = \sqrt[3]{2x^{3/2} - 3x - 1}$.

Alkuarvon vaatiman integroimisvakion voi selvittää myös jo integroidessa käyttämällä määrättyjä integraaleja. Valitaan integroimisvälin aloituspisteeksi alkuarvo-ongelman x-koordinaatti, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^t y(x)^2 y'(x)\,dx &= \int_0^t (x^{1/2}-1)\,dx \\
\Leftrightarrow\ \Big/_0^t \frac{1}{3}y(x)^3 &= \Big/_0^t \frac{2}{3}x^{3/2} - x \\
\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}y(t)^3 - \frac{1}{3}y(0)^3 &= \frac{2}{3}t^{3/2} - t
\end{aligned}$$

johon voi nyt sijoittaa halutun alkuarvon $y(0) = -1$. Ratkaisemalla $y(t)$ saadaan sama lauseke kuin aiemmin.

Missä ratkaisukäyrä täsmälleen kulkee? Funktiolla y on yksi nollakohta, ja se sijaitsee pisteessä $t \approx 2{,}8145$. Siten suurin mahdollinen ratkaisuväli, joka sisältää alkuarvopisteen, on $[0, t[$. Funktio on tällä välillä negatiivinen, sillä alkuarvo on negatiivinen, ja funktio ei ylitä x-akselia.

4. Mikä on differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu?

$$\text{a)} \quad y'(x) = 3x^2 y(x) \qquad \text{b)} \quad y'(x) = 3x^2(1 + y(x)^2)$$

Ratkaisu: a) Yhtälö $y'(x) = 3x^2 y(x)$ on separoituva eli muotoa $y'(x) = p(x)q(y)$, jossa $p(x) = 3x^2$ ja $q(y) = y$. Funktion q nollakohtien avulla saadaan yhtälön triviaaliratkaisut $y = y_0$ (vakiofunktioratkaisut), joita tässä tapauksessa on ainoastaan yksi $y = 0$. Muut ratkaisut y haetaan separoimalla muuttujat x ja y eri puolille yhtälöä:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 3 \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln|y| = x^3 + C_1$$
$$\Leftrightarrow |y| = e^{x^3 + C_1} = e^{C_1} e^{x^3} \Leftrightarrow y = C_2 e^{x^3},$$

jossa $C_1 \in \mathbb{R}$ ja $C_2 = \pm e^{C_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Yhdistämällä triviaaliratkaisu $y = 0$ muihin ratkaisuihin saadaan yhtälön ratkaisuiksi $y(x) = Ce^{x^3}$, $x \in \mathbb{R}$, jossa $C \in \mathbb{R}$.

b) Myös yhtälö $y'(x) = 3x^2(1 + y(x)^2)$ on separoituva ja nyt $p(x) = 3x^2$ ja $q(y) = 1 + y^2$, jossa $q(y) \neq 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ja siten yhtälöllä ei ole triviaaliratkaisuja. Haetaan muut ratkaisut:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2(1 + y^2) \Leftrightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = 3x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = 3 \int x^2 dx \Leftrightarrow \arctan(y) = x^3 + C$$
$$\Leftrightarrow y = \tan(x^3 + C),$$

jossa $C \in \mathbb{R}$.

Yhtälön ratkaisuiksi saadaan $y(x) = \tan(x^3 + C)$, jossa $x \neq \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - C + k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, ja $C \in \mathbb{R}$.

5. Mikä on differentiaaliyhtälön $y' + y^2 = y$ yleinen ratkaisu?

Ratkaisu: Siirtämällä termi y^2 yhtälön toiselle puolelle saadaan differentiaaliyhtälö muotoon

$$y' = y - y^2.$$

Tämä on separoituva differentiaaliyhtälö, jossa luentomuistiinpanojen merkinnöillä $p(x) \equiv 1$ ja $q(y) = y - y^2$. Lisäksi molemmat funktiot p ja q ovat polynomeina jatkuvasti derivoituvia, joten voidaan seurata separoituvien differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmää.

- Yhtälön $q(y) = 0$ ratkaisut antavat differentiaaliyhtälön vakioratkaisut. Huomataan, että

  $$q(y) = 0 \Leftrightarrow y - y^2 = y(1 - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ tai } y = 1,$$

  joten differentiaaliyhtälöllä on tasan kaksi vakioratkaisua, $y(x) \equiv 0$ ja $y(x) \equiv 1$.

- Muilla ratkaisuilla $q(y) \neq 0$ eli $y(x) \neq 0$ ja $y(x) \neq 1$. Kirjoitetaan $h(y) = \frac{1}{q(y)}$ ja lasketaan jokin funktion h integraalifunktio. Funktion $h(y) = \frac{1}{y-y^2}$ integroiminen onnistuu osamurtohajotelman avulla. Koska $y - y^2$ on erisuuret juuret, voidaan kirjoittaa joillain vakioilla a ja b

$$\frac{1}{y-y^2} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y-1}.$$

Esimerkiksi kertomalla puolittain polynomilla $y - y^2$ ja vertaamalla eri puolilla olevien polynomien kertoimia voidaan todeta, että valinta $(a, b) = (1, -1)$ toimii. Nyt voidaan integroida

$$\begin{aligned}\int h(y)dy = \int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) dy \\ &= \ln|y| - \ln|y-1| + C_1 = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| + C_1.\end{aligned}$$

Funktiolle $p(x) = 1$ saamme tunnetusti integraalifunktion $x + C_2$, joten differentiaaliyhtälön implisiittiratkaisuksi saadaan kirjoittamalla $C = C_2 - C_1$

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = x + C$$

väleillä, joissa $y(x) \neq 0$ ja $y(x) \neq 1$. Tämä riittää ratkaisuksi. Voidaan kuitenkin vielä ratkaista y eksplisiittisesti.

Ratkaistaan tästä vielä y. Ottamalla eksponenttifunktio puolittain saadaan $\left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{x+C}$. Lausekkeen $\frac{y}{y-1}$ merkki ei voi vaihtua, koska $y(x)$ on jatkuva y ei saa arvoja 0 eikä 1. Jokaiselle ratkaisulle pätee siis $\frac{y}{y-1} = e^{x+C}$ tai $\frac{y}{y-1} = -e^{x+C}$ kaikilla x. Jos kirjoitetaan $c = \pm e^{-C} \neq 0$, voidaan tästä ratkaista, että

$$y = \frac{e^x}{e^x - c}.$$

Jokainen nollasta eroava vakio c antaa siis differentiaaliyhtälölle ratkaisun. Jos $c < 0$, $e^x - c > 0$, joten ratkaisut voidaan määritellä koko reaalivälillä. Jos taas $c > 0$, saamme maksimaaliset ratkaisut kahdelle välille $(-\infty, \ln(c))$ ja $(\ln(c), \infty)$.

6. Tutki ovatko seuraavat differentiaaliyhtälöt eksakteja joissakin alueissa. Jos yhtälö on eksakti, etsi implisiittinen ratkaisu.

$$\text{a)} \quad y^2 + 2xy - x^2y' = 0 \qquad \text{b)} \quad 2xy + 3 + (x^2 - 1)y' = 0$$

Ratkaisu:

(a) Annettu yhtälö on muotoa $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$, missä $M(x, y) = y^2 + 2xy$ ja $N(x, y) = -x^2$. Nyt

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y + 2x$$

ja

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -2x.$$

Yllä esitetyt osittaisderivaatat saavat saman arvon vain suoralla

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}.$$

Tämä suora ja sen osajoukot ovat kuitenkin suljettuja tasossa, joten eksaktisuuslauseen, Lause 1.10, mukaan ei ole tason **avointa** osajoukkoa, jossa annettu differentiaaliyhtälö olisi eksakti.

(b) Annettu yhtälö on muotoa $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, missä $M(x,y) = 2xy + 3$ ja $N(x,y) = x^2 - 1$. Nyt

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Yhtälö on siis eksaktisuuslauseen, Lause 1.10, mukaan eksakti koko tasossa.

Yhtälön implisiittiratkaisut ovat $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Potentiaalin F tulee toteuttaa yhtälöt:

$$\frac{\partial F(x,y(x))}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F(x,y(x))}{\partial y} = N(x,y).$$

Nyt implitisiittiratkaisu on $x^2y(x) + 3x - y(x) = C$.

Tämä riittää ratkaisuksi, mikäli potentiaalin $F(x,y) = x^2y + 3x - y$ keksii ilman sen kummempia laskuja.

Implisiittiratkaisun voi myös etsiä ratkaisemalla luentomateriaalissa numerolla (1.26) esiintyvän yhtälön:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt = \int_{x_0}^{x} 2sy + 3\,ds + \int_{y_0}^{y} x_0^2 - 1\,dt.$$

Valitsemalla $x_0 = 1$, $x_0^2 - 1 = 0$ ja toinen integraaleista häviää. Tällöin voimme ratkaista potentiaalin F:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{1}^{x} 2sy + 3\,ds \\ &= (x^2y + 3x) - (y + 3) = x^2y + 3x - y - 3. \end{aligned}$$

Asettamalla $F(x,y) = C_1$, saamme jälleen implisiittiratkaisuksi

$$x^2y(x) + 3x - y(x) = C, \qquad \text{missä } C = C_1 + 3.$$