

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus ?

Tehtäviä kertaamista ja itseopiskelua varten, olkaa hyvä. Vihjeitä (ja "ratkaisuja") julkaistaan 20.2.2017 alkavalla viikolla.

1. Mikä on alkuarvo-ongelman

$$y' = \frac{\sin x}{y}, \quad y(0) = -1,$$

ratkaisu $y = y(x)$?

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos x.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$xy' - 2y = 4x^2.$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = xy.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}y.$$

6. Mikä on alkuarvo-ongelman

$$y' = 3x^2y, \quad y(0) = 1,$$

ratkaisu $y = y(x)$?

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) + 7y(x) = xe^{-7x}.$$

8. Mikä on alkuarvo-ongelman

$$y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = -1,$$

ratkaisu?

9. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = (1+x^2)^2.$$

10. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(2x^2 + 1)y' + 2y = 0.$$

11. a) Onko differentiaaliyhtälö

$$2x + y + (x - 6y)y' = 0$$

eksakti jossain suorakaiteessa?

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö.

12. a) Onko differentiaaliyhtälö

$$y^2 + y \sin x + y' \cos x = 0$$

eksakti jossain suorakaiteessa?

b) Ratkaise alkuarvo-ongelma $y(0) = 1$, kun $-1 < x < \frac{\pi}{2}$.

13. a) Onko differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{3x^2 + y}{3y^2 - x}$$

eksakti jossain suorakaiteessa?

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö.

14. Etsi integroiva tekijä, joka tekee yhtälöstä

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy) y' = 0,$$

eksaktin, kun $x > 0$, ja ratkaise saatu eksakti yhtälö.

15. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{x - y}{x}.$$

16. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$2y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2}.$$

17. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y' = 100y - y^2, \quad y(0) = 1.$$

18. Approksimoi alkuarvot tehtävän

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2,$$

ratkaisun arvoa pisteessä $x = 1$ numeerisesti Eulerin menetelmällä, kun askeltilaus $h = \frac{1}{4}$.

19. Etsi kertaluvun pudotuksella differentiaaliyhtälön

$$(2x^2 + 1)y'' - 4xy' + 4y = 0$$

perusjärjestelmä, kun eräs ratkaisu on $y_1(x) = x$.

20. Muodostaako (x, xe^x) differentiaaliyhtälön

$$y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$$

perusjärjestelmän, kun $x > 0$?

21. Mikä on differentiaaliyhtälön

$$y'' - 2y' + 4y = 0$$

perusjärjestelmä?

22. Mikä on differentiaaliyhtälön

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

perusjärjestelmä?

23. Mikä on differentiaaliyhtälön

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

perusjärjestelmä?

24. Mikä on differentiaaliyhtälön

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

perusjärjestelmä?

25. Mikä on differentiaaliyhtälön

$$16y'' + 8y' + y = 0$$

perusjärjestelmä?

26. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + 3y' + 2y = 4e^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

27. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 2y' + 5y = 12e^{-x}.$$

28. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 4y = \cos(3x).$$

29. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + 6y' + 8y = 2x - 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

30. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 7y' + 6y = 3 \cos(2x).$$