

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt I, kevät 2017
Harjoitus ?

Vihjeitä ja tuloksia kertaustehtäviin, olkaa hyvä.

Vihjeet

1. Separoituva differentiaaliyhtälö
2. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
3. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
4. Separoituva differentiaaliyhtälö
5. Separoituva differentiaaliyhtälö
6. Separoituva differentiaaliyhtälö
7. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
8. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
9. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö
10. Separoituva differentiaaliyhtälö
Mikä on funktion $c \arctan(cx)$ derivaatta?
12. b) Bernoullin yhtälö
14. Integroiva tekijä $\mu(x) = x$
15. Tasa-asteinen differentiaaliyhtälö
16. Tasa-asteinen differentiaaliyhtälö
17. Logistinen differentiaaliyhtälö: voidaan ratkaista esimerkiksi separoituvana (osamurtohajotelma) tai Bernoullin yhtälönä
19. Toinen ratkaisu on muotoa $y_2(x) = u(x)x$.
Derivaatalle u' saadaan separoituva differentiaaliyhtälö (käytä osamurtohajotelmaa muodossa $A/x + (Bx)/(2x^2 + 1)$).
 $u' = C_1(1/x^2 + 2)$, $C_1 \in \mathbb{R}$
26. Valistunut arvaus/Yrite: $y_p(x) = A e^{-3x}$
27. Valistunut arvaus/Yrite: $y_p(x) = A e^{-x}$
28. Valistunut arvaus/Yrite: $y_p(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$
29. Valistunut arvaus/Yrite: $y_p(x) = Ax + B$
30. Valistunut arvaus/Yrite: $y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$

Tulokset

1. $y(x) = -\sqrt{3 - 2 \cos x}$
2. $y(x) = Cx + x \sin x, C \in \mathbb{R}$
3. $y(x) = Cx^2 + 4x^2 \ln x, C \in \mathbb{R}$
4. $y(x) = Ce^{(x^2)/2}, C \in \mathbb{R}$
5. $y(x) = Ce^{x^{3/2}}, C \in \mathbb{R}$
6. $y(x) = e^{x^3}$
7. $y(x) = Ce^{-7x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-7x}, C \in \mathbb{R}$
8. $y(x) = e^{-x^2}(x^2 - 1)$
9. $y(x) = C(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(\frac{1}{3}x^3 + x), C \in \mathbb{R}$
10. $y(x) = Ce^{-\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x)}, C \in \mathbb{R}$
11. a) On eksakti koko tasossa (siis jokaisessa suorakulmiossa; käytä eksaktisuuslausetta perusteluun). b) Implisiittinen ratkaisu $x^2 + xy - 3y^2 = C, C \in \mathbb{R}$
12. a) Ei ole eksakti (käytä eksaktisuuslausetta perusteluun). b) $y(x) = (\cos x)/(x+1)$
13. a) Eksaktisuuslauseen mukaan kyseinen muoto yhtälöstä ei ole eksakti b) Kuten separoituvatkin yhtälöt saadaan eksakteiksi, kyseinen differentiaaliyhtälö saadaan eksaktiksi yhtälöksi koko tasossa kertomalla tekijällä $3y^2 - x$. Implisiittinen ratkaisu $x^3 + xy - y^3 = C, C \in \mathbb{R}$
14. Integroiva tekijä on $\mu(x) = x$ ja saadun eksaktin yhtälön implisiittinen ratkaisu $x^3y + \frac{1}{2}y^2 x^2 = C, C \in \mathbb{R}$
15. $y(x) = \frac{C}{x} + \frac{1}{2}x, C \in \mathbb{R}$
16. $y(x) = (x^2 - Cx)/(x + C), C \in \mathbb{R}$, tai $y = \pm x$
17. $y(x) = (100e^{100x})/(e^{100x} + 99)$
18. 495/128
19. $y_2(x) = 2x^2 - 1$
20. Ei muodosta, sillä xe^x ei ole yhtälön ratkaisu.
21. $(e^x \cos(\sqrt{3}x), e^x \sin(\sqrt{3}x))$
22. (e^{-3x}, e^{-2x})
23. $(e^{-2x} \cos(x), e^{-2x} \sin(x))$
24. (e^{2x}, xe^{2x})
25. $(e^{-(1/4)x}, xe^{-(1/4)x})$
26. $y(x) = e^{-3x}(-4e^x + 3e^{2x} + 2)$

27. $y(x) = 3e^{-x} + C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

28. $y(x) = -\frac{1}{5} \cos(3x) + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

29. $y(x) = \frac{1}{16}(4x - 9 - 15e^{-4x} + 40e^{-2x})$

30. $y(x) = \frac{3}{100} \cos(2x) + \frac{21}{100} \sin(2x) + C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$