Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 5 - Ratkaisuehdotuksia tähdettömiin tehtäviin

Tehtäväsarja I

1. Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on aliryhmä H, jossa tiedetään olevan alkiot -24, 12 ja 36. Ovatko sivuluokat $5+H$ ja $29+H$ samat?

   Ratkaisuehdotus: Käytetään lemmaa 10.5. Sivuluokat $5+H$ ja $29+H$ ovat samat jos ja vain jos $-5+29 \in H$. Koska nyt $-5+29 = 24 = 36 + (-24+12) \in H$, niin sivuluokat ovat samat.

Tehtävissä 2–3 käsitellään kääntyvien $(n \times n)$-matriisien ryhmää $GL_n(\mathbb{R})$ ja sen osajoukkoa

$$S = \{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(a) = 1\}.$$

2. Osoita, että S on ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä.

   Neuvo: Normaalisuuskriteeri on tässä kätevä. Muista myös osoittaa joukko aliryhmäksi.

   Ratkaisuehdotus: Osoitetaan ensin S ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$:n aliryhmäksi.

   Selvästi $S \subset GL_n(\mathbb{R})$. Käydään läpi aliryhmän ehdot (H1)-(H3).

   (H1) Oletetaan, että $a, b \in S$. Tällöin $\det(a) = \det(b) = 1$. Nyt determinantin ominaisuuksien nojalla $\det(ab) = \det(a) \cdot \det(b) = 1 \cdot 1 = 1$. Nähdään myös, että $ab \in GL_n(\mathbb{R})$. Siis $ab \in S$.

   (H2) Lineaarialgebrasta tiedetään, että ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ neutraalialkio I:n (ykköslävistäjämatriisi) determinantti on aina 1. Nähdään myös, että $I \in GL_n(\mathbb{R})$. Siis $I \in S$.

   (H3) Oletetaan, että $a \in S$. Tällöin $\det(a) = 1 \neq 0$. Näin ollen matriisi a on kääntyvä ja sen käänteismatriisi a^{-1} on olemassa. Nyt jälleen lineaarialgebrasta tiedetään, että $\det(a^{-1}) = 1/\det(a) = 1/1 = 1$. Nähdään myös, että $a^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Siis $a^{-1} \in S$.

   Aliryhmäksi tarkastaminen voitaisiin tehdä vaihtoehtoisesti myös aliryhmäkriteerin avulla:

   (a) S on epätyhjä, sillä esim. $\det(I) = 1$ ja näin ollen $I \in S$.

   (b) Oletetaan, että $a, b \in S$. Tällöin $\det(a) = \det(b) = 1$. Nyt b on kääntyvä, joten $\det(b^{-1}) = 1/\det(b) = 1/1 = 1$. Edelleen nähdään, että $\det(ab^{-1}) = \det(a) \cdot \det(b^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1$, joten $ab^{-1} \in S$.

   Osoitetaan seuraavaksi, että S on normaali käyttäen normaalisuuskriteeriä.

   Oletetaan, että $n \in S$ ja $g \in GL_n(\mathbb{R})$. Nyt $\det(gng^{-1}) = \det(g) \cdot \det(n) \cdot \det(g^{-1}) = \det(g) \cdot 1 \cdot \det(g^{-1}) = \det(g) \cdot \det(g^{-1}) = \det(gg^{-1}) = \det(I) = 1$, joten $gng^{-1} \in S$. Näin ollen S on normaali.

   On siis todistettu, että S on $GL_n(\mathbb{R})$:n normaali aliryhmä.

3. Merkitään

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Päteekö $aSbS = cS$? Entä $(aS)^{-1} = bS$?

Ratkaisuehdotus: Havaitaan, että $\det(a) \neq 0$ ja $\det(b) \neq 0$, joten a ja b ovat $GL_n(\mathbb{R})$:n alkioita. Edellä todistettiin, että S on normaali aliryhmä, joten $aSbS = abS$. Matriisituloksi ab saadaan:

$$ab = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Nyt jotta $abS = cS$, niin on pädettävä $abc^{-1} \in S$ (lemma 10.5). Lasketaan determinantti: $\det(abc^{-1}) = \det(ab) \cdot \det(c^{-1}) = 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \neq 1$. Siis $abc^{-1} \notin S$. Siten sivuluokat abS ja cS eivät ole samat ja näin ollen $aSbS \neq cS$.

Jotta alkion aS käänteisalkio olisi bS, pitää näiden tulon olla tekijäryhmän neutraalialkio S. Tekijäryhmän laskutoimituksen määritelmän perusteella $aSbS = abS$. Koska $\det(ab) = 1$, niin $ab \in S$ ja näin ollen $abS = S$. Siis $aSbS = S$, joten $(aS)^{-1} = bS$.

4.* Määritä alkion $\frac{3}{4} + \mathbb{Z}$ kertaluku tekijäryhmässä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Tehtäväsarja II

5. Onko $A = \{(1), (234), (243)\}$ ryhmän S_4 normaali aliryhmä?

Ratkaisuehdotus: Aliryhmä A ei ole ryhmän S_4 normaali aliryhmä sillä esimerkiksi

$$(12)A = \{(12), (2341), (2431)\} \neq \{(12), (1342), (1432)\} = A(12).$$

6.* Tutkitaan edelleen ryhmän S_4 aliryhmää $A = \{(1), (234), (243)\}$. Osoita laskutoimituksen määritelmän perusteella, että joukossa S_4/A ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$\alpha A \cdot \beta A = \alpha\beta A.$$

Miten saman asian olisi voinut päätellä edellisen tehtävän avulla?

Vihje: Kannattaa valita tarkasteltaviksi esimerkiksi sivuluokat A sekä $(14)A$.

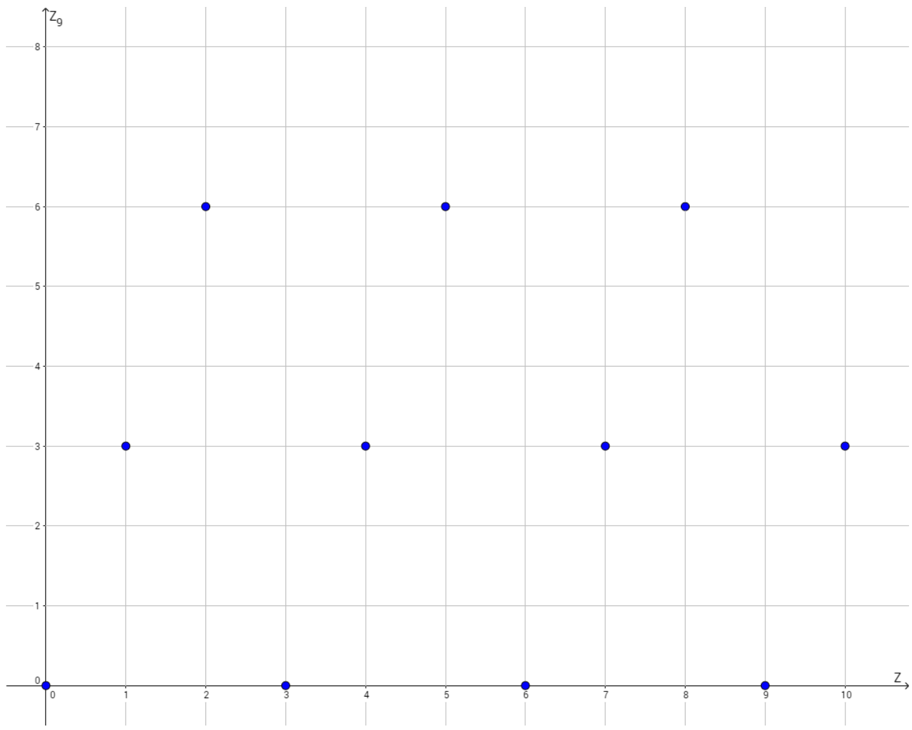
Tehtäväsarja III

7. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

Ratkaisuehdotus: Tarkastellaan siis kuvausta $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_9$, $f(a) = [3a]_9$. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$. Nyt $f(a+b) = [3(a+b)]_9 = [3a+3b]_9 = [3a]_9 + [3b]_9 = f(a) + f(b)$. Siis f on homomorfismi.

8. Piirrä homomorfismin f kuvaaja.

Ratkaisuehdotus:



9. Mikä on homomorfismin f ydin?

   Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että kuvauksen f ydin, $\operatorname{Ker} f$, on $3\mathbb{Z}$.

   ”$\subset$”: Oletetaan ensin, että $a \in \operatorname{Ker} f$. Nyt $[3a]_9 = [0]_9$. Siis $9 \mid 3a$ ja edelleen $3 \mid a$. Tästä seuraa, että $a \in 3\mathbb{Z}$.

   ”$\supset$”: Oletetaan sitten, että $a \in 3\mathbb{Z}$. Nyt $a = 3n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Siis

   $$f(a) = f(3n) = [9n]_9 = [0]_9.$$

   Siten a kuuluu kuvauksen f ytimeen, eli $a \in \operatorname{Ker} f$.

   Näin on osoitettu, että $\operatorname{Ker} f = 3\mathbb{Z}$.

10. Mikä on homomorfismin f kuva?

    Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että homomorfismin f kuva, $\operatorname{Im} f$, on joukko

    $$H = \{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}.$$

    Ensinnäkin huomataan, että $f(0) = [0]_9$, $f(1) = [3]_9$, ja $f(2) = [6]_9$. Siten $H \subset \operatorname{Im} f$.

    Osoitetaan sitten, että $\operatorname{Im} f \subset H$. Oletetaan, että $b \in \operatorname{Im} f$. Nyt $b = f(a)$ jollakin $a \in \mathbb{Z}$. Jakoyhtälön nojalla on olemassa $q, r \in \mathbb{Z}$, joille pätee $a = 3q + r$ ja $0 \leq r < 3$. Nyt

    $$b = f(a) = [3a]_9 = [3(3q + r)]_9 = [9q + 3r)]_9 = [3r]_9.$$

    Koska $0 \leq r < 3$, pätee $b \in H$. Siten $\operatorname{Im} f \subset H$.

    Näin on osoitettu, että $\operatorname{Im} f = H$.

11. Maalijoukolla on aliryhmä

    $$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Päättele ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän H kanssa.

Neuvo: Edellisistä tehtävistä on hyötyä.

Ratkaisuehdotus: Homomorfialauseen nojalla $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. Edelliset tehtävät voidaan tehdä myös kuvauksella $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{15}$, $f(a) = [3a]_{15}$, ja siinä tapauksessa huomataan, että $\operatorname{Ker} f = 5\mathbb{Z}$, ja $\operatorname{Im} f = H$. Siitä seuraa nyt, että $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong H$.

12. (a) Mille alkiolle tehtävän isomorfismi kuvaa sivuluokan $3+5\mathbb{Z}$? Entä sivuluokan $-11+5\mathbb{Z}$?
    (b) Havainnollista isomorfismia kuvan avulla. Miten kuva liittyy tehtävässä 8 piirtämääsi kuvaan?

    Ratkaisuehdotus: Olkoon edellisen tehtävän isomorfismi $\bar{f}$. Nyt $\bar{f}(3+5\mathbb{Z}) = f(3) = [9]_{15}$ ja $\bar{f}(-11+5\mathbb{Z}) = f(-11) = [-33]_{15} = [12]_{15}$.

Tehtäväsarja IV

13. Oletetaan, että ryhmähomomorfismille $f\colon \mathbb{Z}_3 \to S_3$ pätee $f([2]_3) = (123)$. Määritä $f([1]_3)$ ja $f([0]_3)$.

    Ratkaisuehdotus: Koska kyseessä on homomorfismi,huomataan että

$$\begin{aligned} f([1]_3) &= f([2]_3 + [2]_3) = (123)(123) = (132), \text{ ja} \\ f([0]_3) &= f([2]_3 + [1]_3) = (123)(132) = (1). \end{aligned}$$

    Eli $f([0]_3) = (1)$ ja $f([1]_3) = (132)$.

14. Oletetaan, että kuvaukselle $f\colon \mathbb{Z}_4 \to S_3$ pätee $f([2]_4) = (123)$. Voiko f olla ryhmähomomorfismi?

    Ratkaisuehdotus: Oletetaan, että f on homomorfismi. Silloin pätee

$$f([0]_4) = f([2]_4 + [2]_4) = (123)(123) = (132).$$

    Nyt kuitenkin huomataan, että

$$f([2]_4) = f([0]_4 + [2]_4) = (123)(132) = (1) \neq (123).$$

    Päädyttiin ristiriitaan, eli f ei voi olla ryhmähomomorfismi.

15. Määritä kaikki homomorfismit ryhmältä $\mathbb{Z}_4$ ryhmälle S_3.

    Ratkaisuehdotus: Olkoon $f\colon \mathbb{Z}_4 \to S_3$ ryhmähomomorfismi. Esimerkin 18.6. nojalla tiedetään, että virittäjä $[1]_4$ määrää homomorfismin arvot. Virittäjä voidaan kuvata kuudelle eri alkiolle, joten on tarkistettava kuusi eri tapausta. Jokaisessa tapauksessa on varmistuttava siitä, että saadaan varmasti kuvaus. Lisäksi on tarkistettava, että saatu kuvaus on homomorfismi.

    1) Jos $f([1]_4) = (1)$, niin $f([k]_4) = (1)^k = (1)$ kaikilla $[k]_4 \in \mathbb{Z}_4$. Tämä kaava määrittää kuvauksen ja sen tiedetään olevan homomorfismi.

    2) Tutkitaan, mitä tapahtuu, jos $f([1]_4) = (123)$. Nyt pitäisi päteä $f([k]_4) = (123)^k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan, että saatu ehto ei määritä kuvausta. Ensinnäkin $f([2]_4) = (123)^2 = (132)$. Toisaalta $[2]_4 = [6]_4$, joten $f([2]_4) = f([6]_4) = (123)^6 = (1)$. Tämä on mahdotonta, joten ei voi päteä $f([1]_4) = (123)$.

3) Jos $f([1]_4) = (132)$, päädytään samanlaiseen tilanteeseen kuin edellisessä kohdassa. Siis vaihtoehto $f([1]_4) = (123)$ on mahdoton.

4) Jos $f([1]_4) = (12)$, saadaan ehto $f([k]_4) = (12)^k$ kaikilla $[k]_4 \in \mathbb{Z}$. Tämä ehto määrittää kuvauksen, mikä nähdään samaan tapaan kuin esimerkissä 18.6. Oletetaan, että $[k]_4 = [m]_4$ joillakin $k, m \in \mathbb{Z}$. Nyt $k = m + 4a$ jollakin $a \in \mathbb{Z}$. Nähdään, että

$$f([k]_4) = (12)^k = (12)^{m+4a} = (12)^m(12)^{4a} = (12)^m((12)^4)^a = (12)^m(1)^a = (12)^m.$$

Siten ehto antaa kuvauksen.

Osoitetaan vielä, että kuvaus on homomorfismi. Oletetaan, että $[k]_4, [m]_4 \in \mathbb{Z}_4$. Nyt

$$f([k]_4 + [m]_4) = f([k+m]_4) = (12)^{k+m} = (12)^k(12)^m = f([k]_4) + f([m]_4).$$

Siten kuvaus on homomorfismi.

5) Jos $f([1]) = (13)$, saadaan homomorfismi aivan kuten edellisessä tapauksessa. Sen määrittää ehto $f([k]) = (13)^k$ kaikilla $[k] \in \mathbb{Z}$.

6) Jos $f([1]) = (23)$, saadaan homomorfismi aivan kuten edellisessä tapauksessa. Sen määrittää ehto $f([k]) = (23)^k$ kaikilla $[k] \in \mathbb{Z}$.

Näin ollen erilaisia homomorfismeja on neljä.

Tehtäväsarja V

16. Olkoon R rengas. Osoita, että kuvaus $f \colon \mathbb{Z} \to R$, $f(n) = n1_R$ on rengashomomorfismi.

    Lisähuomio: Kyseinen kuvaus tulkitsee kokonaisluvut renkaan R alkioiksi.

    Ratkaisuehdotus: Tehtävänantoon tuli vahingossa hieman väärä kuvaus. Tai vähintäänkin kuvaus on kummallisella tavalla kirjoitettu. Jos nimittäin $a \in \mathbb{Z}$, niin alkio $1_R \cdot a$ pitää tulkita renkaan R alkioksi $1_R \cdot (a1_R) = a1_R$. Tässä $a1_R$ on renkaan ykkösalkion a:s monikerta.

    Toisin sanoen kyseessä on itse asiassa kuvaus $f \colon \mathbb{Z} \to R$, $f(a) = a1_R$, ja tehtävänannon kuvauksen olikin tarkoitus olla kirjoitettu tässä muodossa. Kyseinen kuvaus rinnastaa luonnollisella tavalla jokaisen kokonaisluvun a renkaan R alkion $a1_R$ kanssa niin kuin olemme tottuneet tekemään. Tällöin tehtävään tulee enemmän järkeä.

    Osoitetaan siis, että kuvaus $f \colon \mathbb{Z} \to R$, $f(a) = a1_R$ on rengashomomorfismi. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$. Monikerran ominaisuuksien ja lemman 12.9 nojalla

    $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)1_R = a1_R + b1_R = f(a) + f(b), \\ f(ab) &= (ab)1_R = a(b1_R) = (a1_R)(b1_R) = f(a)f(b) \text{ ja} \\ f(1) &= 1 \cdot 1_R = 1_R. \end{aligned}$$

    Näin ollen $f(a) = 1_R \cdot a$ on rengashomomorfismi.

Ylimääräinen tehtävä

17. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan lisäksi, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.

    Ratkaisuehdotus: Olkoon $g \in G$. Koska $|G/N| = [G : N] = k$, niin $(gN)^k = N$ (korollaari 10.12). Toisaalta harjoituksen 10 tehtävän 14 nojalla $(gN)^k = g^kN$. Siis

    $$g^kN = N$$

    ja koska $g^k \in g^kN$, niin $g^k \in N$.