Algebralliset rakenteet II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.4.2017 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 5.5.2017 klo 18.00

Tehtäväsarja I

1. Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on aliryhmä H, jossa tiedetään olevan alkiot -24, 12 ja 36. Ovatko sivuluokat $5 + H$ ja $29 + H$ samat?

Tehtävissä 2–3 käsitellään kääntyvien $(n \times n)$-matriisien ryhmää $GL_n(\mathbb{R})$ ja sen osajoukkoa

$$S = \{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(a) = 1\}.$$

2. Osoita, että S on ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä.

   Neuvo: Normaalisuuskriteeri on tässä kätevä. Muista myös osoittaa joukko aliryhmäksi.

3. Merkitään

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Päteekö $aSbS = cS$? Entä $(aS)^{-1} = bS$?

4.* Määritä alkion $\frac{3}{4} + \mathbb{Z}$ kertaluku tekijäryhmässä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Tehtäväsarja II

5. Onko $A = \{(1), (234), (243)\}$ ryhmän S_4 normaali aliryhmä?

6.* Tutkitaan edelleen ryhmän S_4 aliryhmää $A = \{(1), (234), (243)\}$. Osoita laskutoimituksen määritelmän perusteella, että joukossa S_4/A ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$\alpha A \cdot \beta A = \alpha\beta A.$$

   Miten saman asian olisi voinut päätellä edellisen tehtävän avulla?

   Vihje: Kannattaa valita tarkasteltaviksi esimerkiksi sivuluokat A sekä $(14)A$.

Tehtäväsarja III

Tässä tehtäväsarjassa tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_9$, $f(a) = [3a]_9$.

7. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

8. Piirrä homomofrismin f kuvaaja.

9. Mikä on homomorfismin f ydin?

10. Mikä on homomorfismin f kuva?

Tutustu lukuun 20, jossa käsitellään ryhmien homomorfialausetta.

11. Maalijoukolla on aliryhmä

$$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Päättele ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän H kanssa.

Neuvo: Edellisistä tehtävistä on hyötyä.

12. (a) Mille alkiolle tehtävän isomorfismi kuvaa sivuluokan $3 + 5\mathbb{Z}$? Entä sivuluokan $-11 + 5\mathbb{Z}$?
    (b) Havainnollista isomorfismia kuvan avulla. Miten kuva liittyy tehtävässä 8 piirtämääsi kuvaan?

Tehtäväsarja IV

13. Oletetaan, että ryhmähomomorfismille $f\colon \mathbb{Z}_3 \to S_3$ pätee $f([2]_3) = (123)$. Määritä $f([1]_3)$ ja $f([0]_3)$.

14. Oletetaan, että kuvaukselle $f\colon \mathbb{Z}_4 \to S_3$ pätee $f([2]_4) = (123)$. Voiko f olla ryhmähomomorfismi?

15. Määritä kaikki homomorfismit ryhmältä $\mathbb{Z}_4$ ryhmälle S_3.

Tehtäväsarja V

Renkaille voidaan määritellä rengashomomorfismi samaan tapaan kuin ryhmille määritellään ryhmähomomorfismi. Tutustu kirjan lukuun 19, jossa käsitellään rengashomomorfismeja.

16. Olkoon R rengas. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to R$, $f(n) = n1_R$ on rengashomomorfismi.

    Lisähuomio: Kyseinen kuvaus tulkitsee kokonaisluvut renkaan R alkioiksi.

Ylimääräinen tehtävä

17. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan lisäksi, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.