Algebralliset rakenteet II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus Kertaustehtävät

Tehtävien viimeinen palautuspäivä:
Korjausten viimeinen palautuspäivä: Näitä ei tarkisteta eikä palauteta

1. Määritellään joukkoon $[0,1[\subset \mathbb{R}$ laskutoimitukset

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y, \text{ jos } x+y<1, \\ x+y-1, \text{ muuten.} \end{cases}$$

   ja

$$x \odot y = xy$$

   Onko rakenne $([0,1[,\oplus,\odot)$ rengas?

   Entä jos puoliavoimen välin sijaan on suljettu väli $[0,1]$ laskutoimitukset on määritelty samalla tavalla paitsi $\oplus$:n määritelmä on hieman erilainen:

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y, \text{ jos } x+y \le 1 \\ x+y-1, \text{ muuten.} \end{cases}$$

   ?

2. Kerro miten joukossa $\mathbb{Z}_4$ määritellään yhteen- ja kertolasku ja osoita, että $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ on rengas.

3. Miten määritellään kahden renkaan tulon laskutoimitukset? Anna esimerkki kokonaisalueista K_1 ja K_2 joiden tulo $K_1 \times K_2$ ei ole kokonaisalue.

4. Osoita, että jos p on alkuluku, niin ei ole olemassa sellaisia $n,m \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$ joille $nm = 0$.

5. Sievennä renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomi $(X^2+5X-1)(X^2-4X+4)$. Osoita, että $(X-2)$ on sen tekijä.

6. Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että ydin $\mathrm{Ker}(f)$ on G:n normaali aliryhmä.

7. Pidetään tunnettuna, että kompleksiluvuille e^{ix} ja e^{iy} pätee, että $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ ja $e^{i2\pi} = e^0 = 1$. Osoita, käyttämällä ryhmien homomorfialausetta, että ryhmät $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ ja $S^1 = (\{e^{ix} \mid x \in [0,2\pi[\},\cdot)$ ovat isomorfiset.

8. Olkoon H ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä, joka sisältää luvut 12 ja 33. Ovatko sivuluokat $22+H$ ja $31+H$ samat?

9. Pidetään tunnettuna, että determinantille pätee $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ kaikilla $(n \times n)$-matriiseilla A ja B. Osoita, että

$$H = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

on kaikkien kääntyvien $(n \times n)$-matriisien ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä. Osoita, että H ei ole vaihdannainen.

10. Osoita, että jos I on renkaan R ideaali ja $1_R \in I$, niin $I = R$.

11. Määritä polynomin $X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ juuret ja etsi jokin ensimmäistä astetta oleva polynomi, joka jakaa sen.

12. Olkoon $I \subset Z_4[X]$ niiden polynomien joukko, joissa vakiotermi on nolla. Osoita, että I on ideaali.

13. Määritellään kuvaukset $f, g\colon \mathbb{Z}_4[X] \to \mathbb{Z}_4$ siten että $f(P)$ on ensimmäisen asteen termin kerroin polynomissa P ja $g(P)$ on polynomin P vakiotermi (nollannen asteen kerroin). Onko f rengashomomorfismi? Onko g? Määritä kuvauksen g ydin. Extra: Osoita käyttämällä renkaiden homomorfialausetta, että $\mathbb{Z}_4[X]/I \cong \mathbb{Z}_4$, missä I on määritelty edellisessä tehtävässä.

14. Onko polynomi $X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ jaoton?

15. Tässä tehtävässä ei saa viitata ryhmien homomorfialauseeseen. (Kokeessa ei ole näin pitkää tehtävää, mutta osa saattaa esiintyä tehtäväsarjana.)

    Olkoon $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ja $G_1 \subset G$, $G_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}_2\}$. (a) Määritä G_1:n sivuluokat G:ssä. Olkoon S kaikkien näiden sivuluokkien joukko. (b) Osoita, että laskutoimitus $\oplus$ hyvin määritelty S:ssä:

$$((x, y) + G_1) \oplus ((x', y') + G_1) = (x + x', y + y') + G_1.$$

    (c) Osoita, että $(S, \oplus)$ on ryhmä. Määritellään kuvaus $f\colon G \to \mathbb{Z}_3$ kaavalla $f(x, y) = y$. Osoita, että (d) f on surjektio, että (e) f on homomorfismi, mutta ei isomorfismi. Määritellään kuvaus $\hat{f}\colon S \to \mathbb{Z}_3$ kaavalla

$$f((x, y) + G_1) = y.$$

    (f) Osoita, että f on surjektio. (g) Osoita, että se on injektio. (h) Osoita, että se on homomorfismi. Kuvaus f on siis isomorfismi. Johtopäätös: $G/G_1 \cong \mathbb{Z}_3$.

16. Olkoon G ja G_1 kuten yllä. Osoita sama kuin yllä, eli että $G/G_1 \cong \mathbb{Z}_3$. Tällä kertaa voit käyttää ryhmien homomorfialausetta.

17. Osoita, että jokaisessa kokonaisalueessa D pätee niin sanottu *supistamissääntö*: jos $ab = ac$ ja $a \neq 0$ joillakin $a, b, c \in D$, niin $b = c$.

18. Anna esimerkki renkaasta ja sen alkioista, joille edellisen tehtävän supistamissääntö ei päde. Keksitkö sellaisen esimerkin, missä kaikki kolme alkiota a, b ja c ovat erisuuria kuin nolla?