Nämä harjoitukset palautetaan vain kerran.
Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 28.4.2017 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: Huom: näitä ei palautetaa uudestaan

Tehtäväsarja I

1. Totta vai tarua?
   (a) Jokainen sivuluokka on aliryhmä.
   (b) Jokainen aliryhmä on sivuluokka.
   (c) Jokainen jäännösluokka on sivuluokka.
2. Olkoon $f\colon \mathbb{Z} \to S_3$ määritelty kaavalla $f(n) = (123)^n$. Merkitään $A_3 = \{(1), (123), (321)\}$. Totta vai tarua?
   (a) Joukko S_3 on f:n maalijoukko.
   (b) Joukko S_3 on f:n arvojoukko.
   (c) Joukko A_3 on f:n maalijoukko.
   (d) Joukko A_3 on f:n arvojoukko.
   (e) f on surjektio.
   (f) f on injektio.
   (g) f:n ydin on $\{0\}$.
3. Olkoon N ryhmän G normaali aliryhmä. Pitääkö tällöin paikkansa, että N on vaihdannainen? Perustele vastauksesi.

Tehtäväsarja II

4. Miten ryhmähomomorfismismin ydin ja kuva liittyvät kuvauksen injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen? Selitä omin sanoin, mistä yhteydet näiden käsitteiden välilä johtuvat.
5. Tutkitaan homomorfismia $f\colon 6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3, f(a) = [a/6]_3$. Havainnollista kuvausta f piirtämällä sen kuvaaja. Merkitse kuvaan aliryhmät $\operatorname{Ker} f$ ja $\operatorname{Im} f$.

6.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä isomorfismi, joka saadaan homomorfismista f ryhmien homomorfialauseen avulla.

7. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että tekijäryhmä $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times \{0\})$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa.

   Neuvo: Kuvauksesta $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a, b) = b$ on apua.
8. Piirrä ensin kuva ryhmästä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja sitten ryhmästä $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times \{0\})$. Kuinka jälkimmäisestä kuvasta näkyy, että ryhmät $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times \{0\})$ ja $\mathbb{Z}$ ovat isomorfisia?

9.* Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Tutkitaan ytimen $\operatorname{Ker} f$ sivuluokkia. Osoita, että samassa sivuluokissa olevilla alkioilla on sama kuva-alkio kuvauksessa f.

Tehtäväsarja III

10. Anna esimerkki kahdesta renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ eri polynomista, joita vastaava polynomikuvaus on vakiokuvaus

$$f\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, \quad f(x) = 1$$

Vinkki: Varo, ettet vahingossa anna samaa polynomia kahdella eri tavalla kirjoitettuna! Toisen polynomin asteeksi kannattaa valita kolme.

11. Onko renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomi $X^3 + 2X + 2$ jaoton?

12.* Onko polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkio $3X^2 - 1$ yksikkö?

Tehtäväsarja IV

13. Tutkitaan ryhmää $\mathbb{Z}_8$ ja sen aliryhmää $I = \langle [4]_8 \rangle$. Tekijäryhmässä $\mathbb{Z}_8/I$ voidaan määritellä kertolasku kaavalla

$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I.$$

Tällöin joukko $\mathbb{Z}_8/I$ on rengas.

(a) Määritä renkaan $\mathbb{Z}_8/I$ yhteenlasku- sekä kertotaulu.
(b) Mikä on renkaan nolla-alkio? Entä ykkösalkio?
(c) Onko alkiolla $[2]_8 + I$ käänteisalkiota?

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Onko rengas $\mathbb{Z}_8/I$ kokonaisalue?

Samalla tavalla tavalla kuin ryhmistä saadaan tekijäryhmiä, renkaista saadaan tekijärenkaita, mistä saatii esimakua jo edellä. Tutustu lukuun 16, jossa käsitellään ideaaleja ja tekijärenkaita

15. Osoita, että $I = \langle [4]_8 \rangle$ on renkaan $\mathbb{Z}_8$ ideaali. Miten tämä liittyy siihen, että sivuluokkien joukossa voidaan määritellä kertolasku?

Ylimääräisiä tehtäviä

Tehtävillä 16–18 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

16. Laadi käsitekartta kurssilla käsitellyistä asioista. Selitä kartassasi käsitteiden väliset yhteydet. Merkitse karttaan jollakin tavalla kaikkein keskeisimmät käsitteet.

17. Oletetaan, että $G = \langle g \rangle$ on äärellinen syklinen ryhmä, jossa on n alkiota. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_n \cong G$.

Seuraavassa tehtävässä todistetaan niin kutsuttu Cayleyn lause. Se osoittaa, että jokainen ryhmä voidaan tulkita jonkin symmetrisen ryhmän aliryhmäksi.

18. Oletetaan, että G on ryhmä. Tutkitaan ryhmää S_G, joka koostuu kaikista ryhmän G alkioiden permutaatiosta.

(a) Oletetaan, että $g \in G$. Osoita, että kuvaus $f_g\colon G \to G$, $f_g(x) = gx$ on bijektio. Toisin sanoen $f_g \in S_G$.
(b) Edellisen kohdan nojalla voidaan määritellä kuvaus $\varphi\colon G \to S_G$ kaavalla $\varphi(g) = f_g$. Osoita, että φ on ryhmähomomorfismi.
(c) Osoita, että φ on injektio. Päättele tämän avulla, että ryhmällä S_G on aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän G kanssa.