Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 1 - Ratkaisuehdotuksia

Tehtäväsarja I

1. (a) Määritä sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
   (b) Mikä on aliryhmän $10\mathbb{Z}$ indeksi $[\mathbb{Z} : 10\mathbb{Z}]$? Miksi sen määrittämiseen ei voi käyttää Lagrangen lausetta?

   Ratkaisuehdotus: Indeksi tarkoittaa vasempien sivuluokkien lukumäärää. On siis määritettävä aliryhmän $10\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat.

   (a) Huomataan, että $a + 10\mathbb{Z} = [a]_{10}$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$. Tässä tapauksessa vasemmat sivuluokat ovat siis sama asia kuin jäännösluokat modulo 10, eli $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{10}$. Toisin sanoen $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = \{[0]_{10}, [1]_{10}, \ldots, [9]_{10}\} = \{0 + 10\mathbb{Z},\ 1 + 10\mathbb{Z}, \ldots, 9 + \mathbb{Z}\}$.
   (b) Koska sivuluokkia on kymmenen, aliryhmän $10\mathbb{Z}$ indeksi on 10. Lagrangen lausetta ei voi tässä tapauksessa käyttää, koska se on määritelty ainoastaan äärellisille joukoille, mutta $\mathbb{Z}$ on ääretön.

Tehtäväsarja II

2. Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Täydennä lemman 10.5 todistusta ja todista seuraava väite.

   Jos $aH = bH$, niin $a^{-1}b \in H$.

   Ratkaisuehdotus: TAPA 1: Olkoon G ryhmä, H sen aliryhmä ja $a, b \in G$. Oletetaan, että $aH = bH$, eli että joukot aH ja bH ovat samat. Tiedetään, että $b \in bH$, joten on oltava olemassa jokin alkio $h \in H$, jolla $ah = b$. Mutta koska kyseessä ryhmä, tästä seuraa, että $h = a^{-1}b$. Silloin siis $a^{-1}b \in H$, kuten piti osoittaa.

   TAPA 2: Käytetään sivuluokkarelaatiota $\sim$. Lemman 10.5 perusteella voidaan myös päätellä seuraavasti: Oletetaan, että $aH = bH$. Nyt $a \in aH = bH$. Siis a kuuluu alkion b ekvivalenssiluokkaan. Tästä seuraa, että $a \sim b$ eli $a^{-1}b \in H$.

3. Olkoon G ryhmä, jonka kertaluku on pq, missä p ja q ovat alkulukuja. Osoita, että jokainen ryhmän G aito aliryhmä on syklinen.

   Ratkaisuehdotus: Olkoon H G:n aito aliryhmä. Koska G on äärellinen, niin Lagrangen lauseen nojalla $[G : H] = |G|/|H|$ eli

$$|H| \cdot [G : H] = |G| = pq.$$

   Siis $|H|$ on luvun pq tekijä. Koska p ja q ovat alkulukuja, niin luvun pq ainoat positiiviset tekijät ovat 1, p, q ja pq. Koska H on aito aliryhmä, niin $|H| < |G| = pq$, joten $|H|$ on jokin luvuista 1, p ja q. Jos $|H| = 1$, niin $H = \langle e \rangle$ on neutraalialkion virittämänä syklinen. Muussa tapauksessa H on ryhmä, jonka kertaluku on alkuluku, joten lauseen 10.13 nojalla H on syklinen.[1]

Tehtäväsarja III

4. Määritellään kokonaislukujen joukossa laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ seuraavasti:

$$m \oplus n = m + n + 1 \qquad \text{ja} \qquad m \odot n = mn + m + n.$$

Tällöin $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on rengas.

(a) Mikä on renkaan nolla-alkio?
(b) Mikä on renkaan ykkösalkio?
(c) Tarkista, että osittelulait pätevät renkaassa $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

Ratkaisuehdotus:

(a) Oletetaan, että $m \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että -1 on renkaan nolla-alkio, sillä

$$\begin{aligned} &m \oplus -1 = m - 1 + 1 = m \quad \text{ja} \\ &-1 \oplus m = -1 + m + 1 = m. \end{aligned}$$

(b) Oletetaan, että $m \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että 0 on renkaan ykkösalkio, sillä

$$\begin{aligned} &m \odot 0 = m \cdot 0 + m + 0 = m \quad \text{ja} \\ &0 \odot m = 0 \cdot m + 0 + m = m. \end{aligned}$$

(c) Tarkastetaan vielä, että laskutoimituksille $\oplus$ ja $\odot$ pätevät osittelulait. Olkoon $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned} m \odot (n \oplus k) &= m \odot (n + k + 1) = m(n + k + 1) + m + (n + k + 1) \\ &= mn + mk + m + m + n + k + 1 = (mn + m + n) + (mk + m + k) + 1 \\ &= m \odot n \oplus m \odot k, \text{ ja} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m \oplus n) \odot k &= (m + n + 1) \odot k = (m + n + 1)k + (m + n + 1) + k \\ &= mk + nk + k + m + n + 1 + k = (mk + m + k) + (nk + n + k) + 1 \\ &= m \odot k \oplus n \odot k. \end{aligned}$$

Näin ollen osittelulait pätevät renkaassa $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

5. Merkitään $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Miksei $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ole rengas tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen?

Ratkaisuehdotus: Ongelmana on, että kertolasku ei ole joukon $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ laskutoimitus. Esimerkiksi $\frac{1}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, mutta $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Muut renkaan ehdot kyllä toteutuisivat.

[1] Hienovarainen pointti, mitä voi halutessaan miettiä: miksi se, että H on ryhmänä jonkin alkionsa h virittämä on sama asia kuin se, että H on alkion h virittämä G:n aliryhmä?

6.* Olkoon $+$ tavallinen vektoriyhteenlasku joukossa $\mathbb{R}^3$ ja $\times$ tavallinen ristitulo. Miksi $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ei ole rengas?

Ratkaisuehdotus: Ongelmana on tässä tapauksessa ristitulo. Huomataan esimerkiksi, että ristitulo ei ole liitännäinen. Osoitetaan vastaesimerkillä. Olkoon $u = (1,1,0), v = (0,1,1), w = (1,0,1)$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= (1,1,0) \times ((0,1,1) \times (1,0,1)) \\ &= (1,1,0) \times (1,1,-1) = (-1,1,0) \quad \text{ja} \\ (u \times v) \times w &= ((1,1,0) \times (0,1,1)) \times (1,0,1) \\ &= (1,-1,1) \times (1,0,1) = (-1,0,1). \end{aligned}$$

Huomataan, että $u \times (v \times w) = (-1,1,0) \neq (-1,0,1) = (u \times v) \times w$, eli ristitulo ei ole liitännäinen, ja siten $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ei ole rengas.

7.* Osoita, että $[3]_4$ on renkaan $\mathbb{Z}_4$ yksikkö. Mitä muita yksiköitä renkaassa $\mathbb{Z}_4$ on?

Ratkaisuehdotus: Renkaan $\mathbb{Z}_4$ ykkösalkio on $[1]_4$. Muodostetaan renkaan kertotaulu.

$\cdot$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$	$[0]_4$
$[1]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$	$[0]_4$	$[2]_4$
$[3]_4$	$[0]_4$	$[3]_4$	$[2]_4$	$[1]_4$

Kertotaulusta nähdään, että renkaan yksiköt ovat $[1]_4$ ja $[3]_4$.