Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 20.1.2017 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 3.2.2017 klo 19.30

Viittaukset kurssimateriaaliin ovat kurssikirjan kolmanteen painokseen ja suluissa aina toiseen painokseen mikäli se on eri.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssikirjan lukuun 2, jossa käsitellään laskutoimituksia.

Määritellään joukolle $K_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ laskutoimitus $\clock$, jota kutsutaan kellotaulusummaksi: jos $n, m \in K_{12}$, niin $n \clock m$ on se kellonaika, joka saadaan, kun kellonaikaan n lisätään m tuntia. Esimerkiksi $2 \clock 6 = 8$ ja $9 \clock 4 = 1$.

1. Määritä kellonajat $3 \clock 8$, $10 \clock 6$ ja $12 \clock 8$.

2. Ranskan vallankumouksen jälkeen Ranskassa käytettiin muutaman vuoden desimaaliaikaa kuten myös Kiinassa satojen vuosien ajan. Kellotaulussa oli siis 10 tuntia (12 tai 24 sijaan). Tarkastele kellotaulusummaa joukossa $K_{10} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

Tehtäväsarja II

Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan kirjoittaa *laskutoimitustauluun* (kirjan kappale 2.3). Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon S alkioilla, ja taulukon riville x sarakkeeseen y kirjoitetaan tulos $x * y$.

3. Oheinen laskutoimitustaulu kertoo miten kaverusjoukon $\{Maijukka, Galaktion, Luiisa, Ylermi\}$ juoruilu toimii. Kun kaverukset x ja y tapaavat kahdestaan, ne juoruvat aina kaverista $x \circledast y$. Mikäli $x = y$ tämä kertoo sen henkilön z, josta x aina puhuu kaikille (saattaa olla hän itse). Kutsutaan tätä laskutoimitusta juorukertolaskuksi.

$\circledast$	Maijukka	Galaktion	Luiisa	Ylermi
Maijukka	Ylermi	Maijukka	Luiisa	Galaktion
Galaktion	Maijukka	Galaktion	Luiisa	Ylermi
Luiisa	Luiisa	Luiisa	Ylermi	Maijukka
Ylermi	Galaktion	Ylermi	Maijukka	Ylermi

Määritä seuraavat kaverukset: Luiisa $\circledast$ Galaktion, Maijukka $\circledast$ Ylermi, Luiisa $\circledast$ Maijukka.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.1, jossa käsitellään laskutoimiuksen liitännäisyyttä ja vaihdannaisuutta.

4. Osoita, että tehtävän 3 juorukertolasku ei ole liitännäinen.

5. Tehtävän 3 juorukertolasku on vaihdannainen. Miten se näkyy laskutoimitustaulussa?
6. Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x*y = x^2+y^2$. Onko laskutoimitus liitännäinen?
7.* Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = x - xy - y$. Onko laskutoimitus vaihdannainen? (Muista perustella vastauksesi huolellisesti.)
8.* Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = 2xy$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssikirjan lukuun 2.2, jossa käsitellään laskutoimiuksen neutraalialkiota ja alkioiden käänteisalkioita.

9. Määritä joukon K_{12} kellotaulusumman neutraalialkio.
10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot?
11. Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaankin kellotaulusummaa joukossa $K_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
12. Tehtävän 3 juorukertolaskulla on neutraalialkio. Mikä se on? Millä kaveruksilla on käänteiskaverukset?
13. Merkitään $A = \{1, 2\}$. Tutkitaan potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$. Yhdisteoperaatio $\cup$ on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen $\cup$ neutraalialkio?
14.* Tutkitaan edelleen potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$, missä A on kuten edellisessä tehtävässä. Leikkausoperaatio $\cap$ on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen $\cap$ neutraalialkio?
15. Olkoon X joukko. Määritä neutraalialkio ja ne potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ alkiot, joilla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cap$ suhteen.
16. Olkoon X joukko ja olkoon $G = \mathcal{P}(X)$ sen potenssijoukko. Määritellään operaatio $\triangle$ symmetrinen erotus kaikille $a, b \in G$ kaavalla
$$a \triangle b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$$
Osoita että näin määritelty laskutoimitus G:ssä toteuttaa:
    (a) se on liitännäinen
    (b) G:ssä on $\triangle$:n suhteen neutraalialkio,
    (c) jokaisella alkiolla $a \in G$ on käänteisalkio,
    (d) laskutoimitus on vaihdannainen.

    Huom: riittää todistaa käyttämällä Venn-diagrammeja! Laskuja ei tarvitse kirjoittaa auki.

Tehtäväsarja V

Jatkossa tulemme tarvitsemaan lukuteorian tietoja. Tutustu lukuun 5.1 (toinen painos 7.1) joissa käsitellään jaollisuutta.

17. Mitkä seuraavista pitävät paikkansa?
$$8 \mid -64, \quad 4 \mid 11, \quad 0 \mid 5$$
Tarkkoja perusteluja ei tarvita.
18. Määritä seuraavissa tapauksissa luvun a jakojäännös luvulla b jaettaessa. Perustele vastauksesi jakojäännöksen määritelmän avulla.
(a) $a = 22$ ja $b = 4$ (b) $a = 15$ ja $b = -3$ (c) $a = -14$ ja $b = 3$
19. Etsi väliltä $[-20, 20]$ kuusi eri lukua, joiden jakojäääänös luvulla 7 jaettaessa on 2.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

20. Oletetaan, että $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

    (a) Jokaisella $a \in S$ pätee $(a * a) * a = a * (a * a)$.

    (b) Joukon S alkiolla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen $*$ suhteen.