

# Perusasiaa ryhmistä ja esimerkkejä

Vadim Kulikov

January 23, 2017

# Vähän joukko-oppia

$\emptyset$

# Maailman pienimmät ryhmät

?

# Maailman pienimmät ryhmät

$\{0\}$

# Maailman pienimmät ryhmät

$$\{0, 1\}$$

# Neutraali- ja käänteisalkiot

Olkoon  $(G, \cdot)$  ryhmä, jonka neutraalialkio on  $e$  ja oletetaan että jollekin  $a, b \in G$  pätee  $ab = e$ .  
Päteekö silloin myös  $ba = e$ ?

# Yhtälöin ratkaisu ryhmässä

Oletetaan että joillain  $x, y, y', z \in G$  pätee

$$xy = z$$

$$xy' = z$$

onko  $y$  tällöin väistämättä sama kuin  $y'$ ?

## Lause 3.12 (3.10 painoksessa 2)

Äärellisen ryhmän laskutoimitustaulussa jokainen alkioista esiintyy täsmälleen kerran jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa.



# Bijektiot

Jokainen ryhmän alkio  $x \in G$  määrittelee siis bijektion

$$(y \mapsto xy) : G \rightarrow G$$

# Bijektiot

Toisaalta minkä tahansa joukon bijektiot muodostavat funktioiden yhdistämisen suhteen ryhmän.

# Lisää pieniä ryhmiä

$\{1, 2, 3, 4\}$

# Lisää pieniä ryhmiä

△ ja ⌚

# Lisää pieniä ryhmiä

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

# Alkuluku!

`http://oeis.org/wiki/Number\_of\_groups\_of\_order\_n`

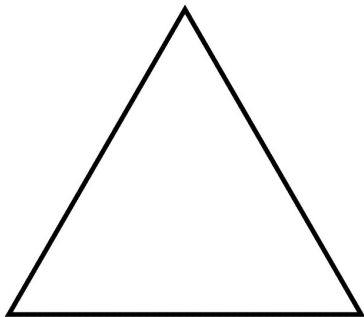
Kaikki ryhmät tähän asti vaihdannaisia!

# Ensimmäinen epävaihdannainen ryhmä

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



# Kolmion symmetriaryhmä



# Kolmen alkion permutaatiot (=Bijektiot!)

(1, 2, 3)

(1, 3, 2)

(2, 1, 3)

(2, 3, 1)

(3, 2, 1)

(3, 1, 2)

# Kolmen alkion permutaatiot (=Bijektiot!)

(1, 2, 3)

(1, 3, 2)

(2, 1, 3)

(2, 3, 1)

(3, 2, 1)

(3, 1, 2)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Dihedral\\_group\\_of\\_order\\_6](https://en.wikipedia.org/wiki/Dihedral_group_of_order_6)

# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä

# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä
- Vain osa askeleista käytössä

# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä
- Vain osa askeleista käytössä
  - Rubikin kuutio: vain valittuja tahkoja saa kääntää.

# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä
- Vain osa askeleista käytössä
  - Rubikin kuutio: vain valittuja tahkoja saa kääntää.
  - Kolmion symmetria: ei saa peilata (piirrä nuolet)

# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä
- Vain osa askeleista käytössä
  - Rubikin kuutio: vain valittuja tahkoja saa kääntää.
  - Kolmion symmetria: ei saa peilata (piirrä nuolet)
  - 24 tunnin vuorokausi minuutteina vs. tunteina



# Aliryhmät

- Ryhmä toisen sisällä
- Vain osa askeleista käytössä
  - Rubikin kuutio: vain valittuja tahkoja saa kääntää.
  - Kolmion symmetria: ei saa peilata (piirrä nuolet)
  - 24 tunnin vuorokausi minuutteina vs. tunteina

# Määritelmä

$H \subset G$  on aliryhmä jos se on suljettu laskutoimituksen ja käänteisalkion ottamisen suhteen, eli operaatioiden

$$(x, y) \mapsto xy$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

suhteen.