

Mitä on ryhmä?

Vadim Kulikov

January 18, 2017

Tavoite

Tämän luennon päätteeksi sinulla pitäisi olla ymmärrys siitä miksi ryhmä määritellään niin kuin se määritellään.

Ryhmä

Tämä ei ole kurssin virallinen ryhmän eikä symmetriaryhmän määritelmä! Ainoastaan “intuitiopumppu”.

Olkoon X jokin objekti johon voi soveltaa samanlaisuusrelaatiota \sim . Silloin X :n ja \sim :n liittyvä symmetriaryhmä on kaikkien operaatioiden O joukko joille pätee $X \sim O(X)$.

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen **operaation** O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla **samanlainen** itsensä kanssa.

Ryhmä

Tämäkään ei ole kurssin virallinen ryhmän määritelmä! Ainoastaan “intuitiopumppu”.

Olkoon X jokin avaruus tai sijaintien joukko ja A erilaisten askelien joukko, joita siinä avaruudessa voi ottaa. Olkoon L kaikkien mahdollisten A :n askelien kombinaatioiden joukko. Silloin pari (X, L) muodostaa ryhmän.

Toinen näkökulma ryhmäteoriaan.

Ryhmäteoriaa voi ajatella myös **liikkumisen** teoriana. Mitä kaikkia **askelia** on mahdollista ottaa? Mihin **paikkoihin** askelkombinaatiot vievät?

Miten tunnistaa ryhmä?

Filosofinen kysymys.

Oletetaan että meille on annettu jokin operaatio jossain joukossa. Mistä tiedetään että se ei ainakaan ole ryhmä?

Mitkä ehdot toteutuu aina jos kyseessä on symmetria-intuitio tai liikkumisintuitio?

Aksiomaattinen lähestymistapa

Ryhmä määritellään matematiikassa aksiomaattisesti. Tässä tapauksessa aksioomat voi ajatella ehtoina joita objektin täytyy toteuttaa. Syyt:

- Aksiomatisointi antaa formaalin lähestymistavan,
- Kun aksiomia on vähän, on helppo todistaa asioita “kaikista ryhmistä”.

Pohdittavaa

- Minkä operaation suhteen kaikki maailman objektit ovat symmetrisiä?
- Mikä liikeaskel on käytettävissä kaikilla maailman objekteilla?

Neutraalialkio

Kun ei tehdä mitään.

Neutraalialkio

Kun ei tehdä mitään.

Pohdittavaa

Määritellään reaaliluvuille operaatio (laskutoimitus)

\oplus kaavalla

$$x \oplus y = x + y + 4$$

Onko operaatiolla neutraalialkiota?

Aksioma (G2): Neutraalialkio

Ryhmässä on oltava neutraalialkio.

Pohdittavaa

Liikemetafora: minulla on käytettävissä askeleet x , y ja z

Katson millainen yhdistelmäaskel tulee kun teen askeleen y askeleen x jälkeen. Teen tämän yhdistelmäaskeleen. Sitten liikun askeleen z mukaisesti.

vs

Katson millainen yhdistelmäaskel tulee kun teen askeleen z askeleen y jälkeen. Teen ensin askeleen x ja sitten ym. yhdistelmäaskeleen.

?

Aksioma (G1): Liitännäisyys.

$$(xy)z = x(yz)$$

Pohdittavaa

Operaation tehtyä, **is there a way back?**

Aksiooma (G3): Käänteisalkio

Kaikilla x on olemassa y siten että

$$xy = e,$$

missä e on käänteisalkio.

Ryhmän määritelmä

Ryhmä on pari $(G, *)$, missä G on joukko ja $*$: $G \times G \rightarrow G$ on kuvaus (parin (x, y) kuvaa merkitään $x * y$) joka toteuttaa:

$$\mathbf{G1} \quad \forall x, y, z \in G \left((x * y) * z = x * (y * z) \right),$$

$$\mathbf{G2} \quad \exists e \in G \left(\forall x \in G (x * e = e * x = x) \right),$$

$$\mathbf{G3} \quad \forall x \in G \exists y \in G (x * y = y * x = e).$$