Mitä on (abstrakti) algebra?

Vadim Kulikov

January 18, 2017

Käytännön asia

vadim.kulikov@helsinki.fi

Tavoite

Tämän luennon päätteeksi sinulla pitäisi olla **intuitiivinen** kuva siitä mitä **ryhmäteoria** on ja jonkinlainen käsitys siitä mitä **abstrakti algebra** on, eli **miksi olet täällä**.

Ryhmäteoria

Aloitamme siitä mitä on **ryhmäteoria**, joka on algebran osa-alue.

Symmetria

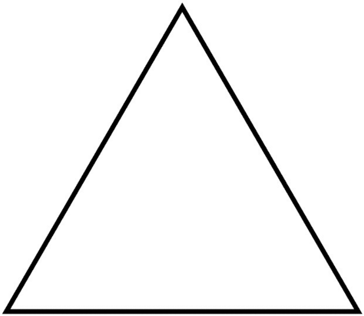
Eräs intuitio jolla ryhmäteoriaa voi lähestyä on se että se on matemaattinen teoria **symmetriasta**.

Symmetria

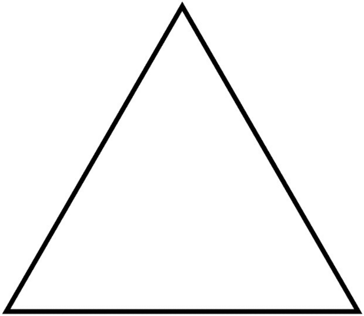
Filosofinen(?) kysymys:

Mitä on symmetria?

Esimerkkejä symmetriasta

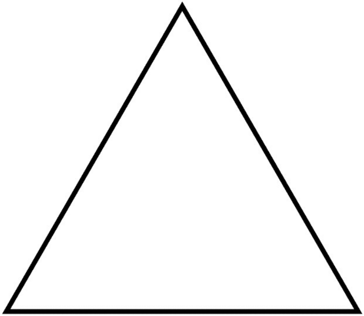


Esimerkkejä symmetriasta



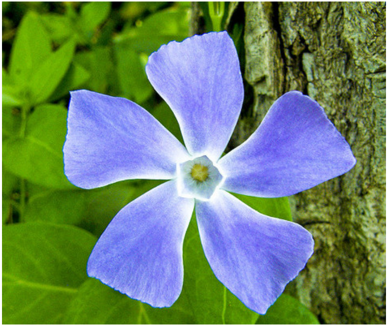
- kierrot,

Esimerkkejä symmetriasta

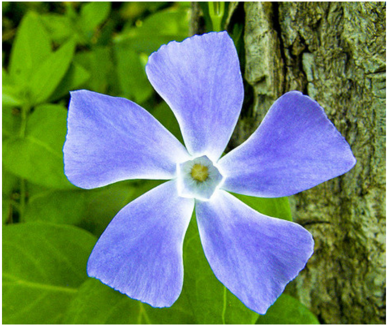


- kierrot,
- peilaukset.

Esimerkkejä symmetriasta



Esimerkkejä symmetriasta



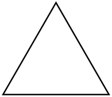
- vain kierrot

Esimerkkejä symmetriasta

Ei peilaussymmetriaa

Ensimmäinen “lause”

Kuvioilla

 ja 

on erilainen symmetria.

Todistus. Toisella on peilaussymmetria, mutta toisella ei. □

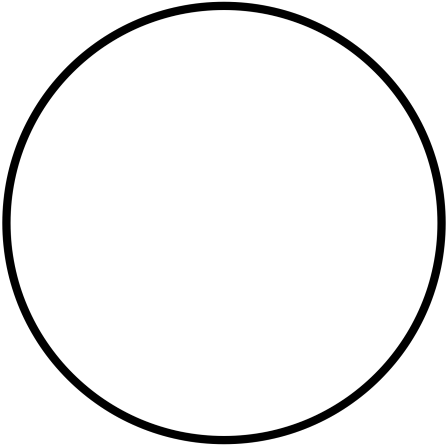
Ryhmäteoria

Ryhmäteorian avulla voi luokitella objekteja symmetriansa perusteella.

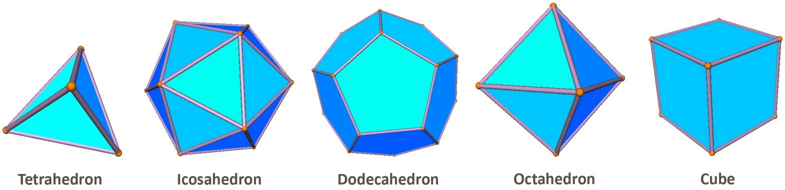
Symmetria

Mitä on symmetria?

Lisää esimerkkejä



Lisää esimerkkejä



Lisää esimerkkejä

Lause. Olkoon $B = \{0, 1\}$ kahden alkion joukko ja $A \subset B$ yksiö. Silloin $B \setminus A$ on myös yksiö.

Lisää esimerkkejä

Lause. Olkoon $B = \{0, 1\}$ kahden alkion joukko ja $A \subset B$ yksiö. Silloin $B \setminus A$ on myös yksiö.
Todistus. Koska A on yksiö, pätee joko $A = \{0\}$ tai $A = \{1\}$.

Lisää esimerkkejä

Lause. Olkoon $B = \{0, 1\}$ kahden alkion joukko ja $A \subset B$ yksiö. Silloin $B \setminus A$ on myös yksiö.
Todistus. Koska A on yksiö, pätee joko $A = \{0\}$ tai $A = \{1\}$. Jos $A = \{0\}$, niin

$$B \setminus A = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\},$$

eli se on yksiö ja väite pätee.

Lisää esimerkkejä

Lause. Olkoon $B = \{0, 1\}$ kahden alkion joukko ja $A \subset B$ yksiö. Silloin $B \setminus A$ on myös yksiö.

Todistus. Koska A on yksiö, pätee joko $A = \{0\}$ tai $A = \{1\}$. Jos $A = \{0\}$, niin

$$B \setminus A = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\},$$

eli se on yksiö ja väite pätee. Tapaus $A = \{1\}$ on **symmetrinen**. $\square$

Lisää esimerkkejä

- Jos polynomilla $x^2 + xy + y^2 + C$ on juuri (x_0, y_0), niin (y_0, x_0) on myös juuri

Lisää esimerkkejä

- Jos polynomilla $x^2 + xy + y^2 + C$ on juuri (x_0, y_0), niin (y_0, x_0) on myös juuri
- Palindromit: “Aivot avaavat ovia.”, “Naku sika haki sukan.”

Lisää esimerkkejä

- Jos polynomilla $x^2 + xy + y^2 + C$ on juuri (x_0, y_0), niin (y_0, x_0) on myös juuri
- Palindromit: "Aivot avaavat ovia.", "Naku sika haki sukan."
- Mozart's "Duett für zwei Violinen"

Lisää esimerkkejä

Lisää esimerkkejä

Musiikissa melodian (esim.) peilaaminen tai oktaavilla siirtäminen ei muuta sen sävellajia.

Mitä on symmetria?

Mitä on symmetria?

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen operaation O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla samanlainen itsensä kanssa.

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen operaation O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla samanlainen itsensä kanssa. Esimerkkejä:

- Kolmio näyttää samalta peilauksen tai kierron jälkeen,

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen operaation O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla samanlainen itsensä kanssa. Esimerkkejä:

- Kolmio näyttää samalta peilauksen tai kierron jälkeen,
- Melodia on samassa sävellajissa oktaavilla siirtämisen jälkeen,

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen operaation O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla samanlainen itsensä kanssa. Esimerkkejä:

- Kolmio näyttää samalta peilauksen tai kierron jälkeen,
- Melodia on samassa sävellajissa oktaavilla siirtämisen jälkeen,
- Palindromi kuullostaa samalta takaperin luettuna,

Mitä on symmetria?

Objekti X on symmetrinen operaation O suhteen, jos se on tämän operaation jälkeen jollain tavalla samanlainen itsensä kanssa. Esimerkkejä:

- Kolmio näyttää samalta peilauksen tai kierron jälkeen,
- Melodia on samassa sävellajissa oktaavilla siirtämisen jälkeen,
- Palindromi kuullostaa samalta takaperin luettuna,
- Todistus on sama kun 0 ja 1 vaihtaa paikkaa.

Ryhmä

Tämä ei ole kurssin virallinen ryhmän eikä symmetriaryhmän määritelmä! Ainoastaan "intuitiopumppu".

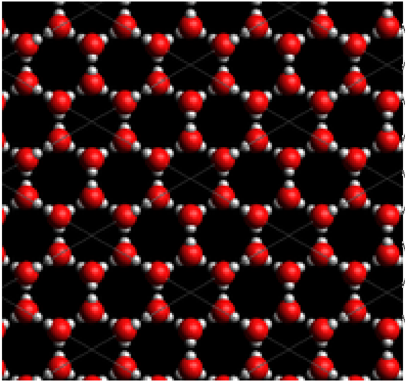
Olkoon X jokin objekti johon voi soveltaa samanlaisuusrelaatiota $\sim$. Silloin X:n ja $\sim$:n liittyvä symmetriaryhmä on kaikkien operaatioiden O joukko joille pätee $X \sim O(X)$.

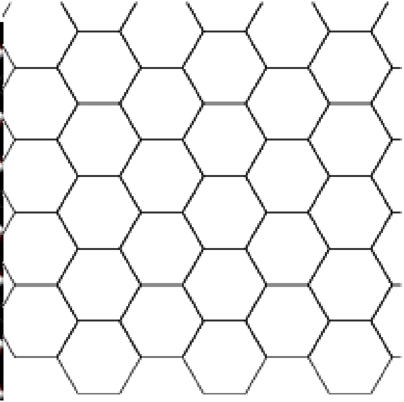
Muita sovelluksia

Ryhmäteorialla on sovelluksia symmetrian ymmärtämiseen myös:

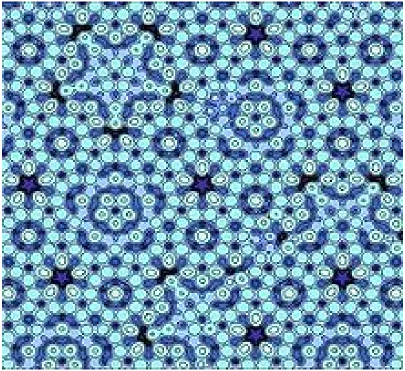
- Laatoitusten luokittelu (sovelluksia taiteeseen ja kristalleihin),
- Kemiassa (kristallit, molekyylien symmetriat),
- Kvanttifysiikassa (yhtälöjen ratkaisujen joukon symmetriat).

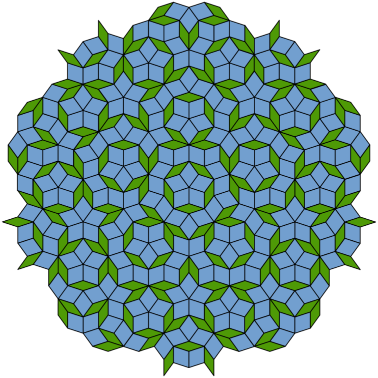
Kristallit ja laatoitukset



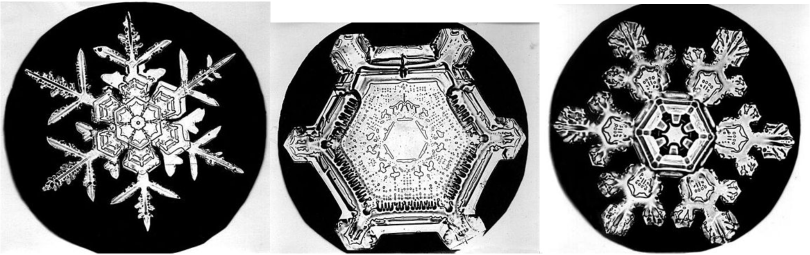


Kristallit ja laatoitukset





Lumihiutaleet



Lumihiutaleita on paljon erilaisia, mutta ihminen pystyy ymmärtämään miksi niillä kaikilla on kuusinkertainen symmetria.

Toinen näkökulma ryhmäteoriaan.

Ryhmäteoriaa voi ajatella myös **liikkumisen** teoriana. Mitä kaikkia askelia on mahdollista ottaa? Mihin paikkoihin askelkombinaatiot vievät?

Esimerkkejä.

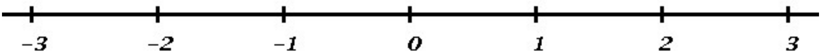
Rubikin kuutio.

Mahdolliset askeleet: eri tahkojen käännökset 90° myötä- tai vastapäivää.

Mahdolliset "sijainnit": Kuution tahkojen eri värityskombot. Askelkombinaatiot vievät yhdeltä sijainnilta toiselle.

Esimerkkejä.

Reaaliakseli ja pluslasku.



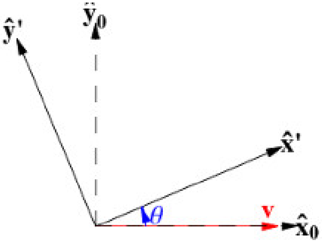
Mahdolliset askeleet: siirtyminen oikealle tai vasemmalle jonkun reaaliluvun verran.

Mahdolliset sijainnit: kaikki reaaliluvut.

Esimerkkejä.

R^n:n kiertomatriisit ja matriisitulo.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Mahdolliset askeleet: avaruuden kierrot origon ympäri.

Mahdolliset “sijainnit”: avaruuden eri “asennot” kiertojen jälkeen.

Laskutoimitukset

Ylipäänsä, laskutoimitukset voi käsitteellistää liikkumisena paikasta toiseen ja ryhmäteoria usein havainnollistetaankin laskutoimitusten teoriana.

Laskutoimitukset

Ylipäänsä, laskutoimitukset voi käsitteellistää liikkumisena paikasta toiseen ja ryhmäteoria usein havainnollistetaankin laskutoimitusten teoriana.

Laskutoimitukset ovat kuitenkin paljon **yleisempi** ja **abstraktimpi** asia, joten ehkä on parempi sanoa, että **algebra on laskutoimitusten teoria**, mutta ei ryhmäteoria.

Laskutoimitukset

Ylipäänsä, laskutoimitukset voi käsitteellistää liikkumisena paikasta toiseen ja ryhmäteoria usein havainnollistetaankin laskutoimitusten teoriana.

Laskutoimitukset ovat kuitenkin paljon **yleisempi** ja **abstraktimpi** asia, joten ehkä on parempi sanoa, että **algebra on laskutoimitusten teoria**, mutta ei ryhmäteoria.

Palataan tähän kohta.

Ryhmä

Tämäkään ei ole kurssin virallinen ryhmän määritelmä! Ainoastaan "intuitiopumppu".

Olkoon X jokin avaruus tai sijainitien joukko ja A erilaisten askelien joukko, joita siinä avaruudessa voi ottaa. Olkoon L kaikkien mahdollisten A:n askelien kombinaatioiden joukko. Silloin pari (X, L) muodostaa ryhmän.

Edellinen “määritelmä”

Olkoon X jokin objekti johon voi soveltaa samanlaisuusrelaatiota $\sim$. Silloin X:n ja $\sim$:n liittyvä <u>symmetriaryhmä</u> on kaikkien operaatioiden O joukko joille pätee $X \sim O(X)$.

Vertailu

$$\begin{aligned} \text{Objektin asennot} &\iff \text{Sijainnit} \\ \text{Symmetriaoperaatiot} &\iff \text{askelkombinaatiot.} \end{aligned}$$

Abstraktista algebrasta

Algebra laskutoimitusoppina

Ehkä prototyyppisin esimerkki siitä mitä algebra on, on yhtälöiden ratkaiseminen.

Algebra laskutoimitusoppina

Yksinkertaisimmillaan yhtälöissä esiintyy vain laskutoimituksia ja yhtäläisyyksiä (eikä esim. derivaattoja tms.):

$$ax + b = 0$$

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

$$2x = 1 \qquad \text{murtoluvut}$$

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

$$\begin{aligned} 2x = 1 &\qquad \text{murtoluvut} \\ x + 1 = 0 &\qquad \text{negatiiviset luvut} \end{aligned}$$

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 && \text{murtoluvut} \\ x + 1 &= 0 && \text{negatiiviset luvut} \\ x^2 &= 2 && \text{irrationaaliluvut} \end{aligned}$$

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 && \text{murtoluvut} \\ x + 1 &= 0 && \text{negatiiviset luvut} \\ x^2 &= 2 && \text{irrationaaliluvut} \\ x^2 + 1 &= 0 && \text{kompleksiluvut} \end{aligned}$$

Algebra laskutoimitusoppina

Yhtälöiden tutkiminen johtaa erilaisten laskutoimitusten ja struktuurien tutkimiseen:

$$\begin{aligned} 2x &= 1 && \text{murtoluvut} \\ x+1 &= 0 && \text{negatiiviset luvut} \\ x^2 &= 2 && \text{irrationaaliluvut} \\ x^2+1 &= 0 && \text{kompleksiluvut} \end{aligned}$$

Huomaa että y.o. yhtälöiden kirjoittamiseen tarvitaan vain epänegatiivisia kokonaislukuja ja niiden kahta laskutoimitusta: $+$ ja $\cdot$.

Vähän historiaa

Galois

Abstraktin algebran synty juontaa juurensa matemaatikkoon Evaristé Galois. 18 vuotiaana hän esitti teorian joka ratkaisi ongelmia jotka olivat olleet avoimina satoja vuosia. Tähän teoriaan perustuu nykyinen Galois'n teoria sekä **todistus sille että viidennen asteen yhtälöllä ei ole ratkaisukaavaa ja että kulmaa ei voi osittaa kolmeen osaan pelkällä harpilla ja viivoittimella.**

Galois

Galois ei koskaan päässyt opiskelemaan haluamaansa yliopistoon... ehkä osittain sen takia että viskasi pääsykoekuulustelijaa pesusienellä, koska tämä oli Galois'n mielestä tyhmä.

Galois

Galois kuoli 20-vuotiaana kaksintaistelussa sen jälkeen kun oli istunut vankilassa (vallankumousaktivistina?) puoli vuotta.

Muita algrabran suurnimiä

- Abel,
- Hilbert,
- Noether (yksi ensimmäisiä naismatemaatikkoja),
- Cayley,
- Lagrange,
- Artin
- ...

Algebran rooli matematiikan alana

Algebralla on vähemmän sovelluksia kuin esim. lineaarialgebralla matematiikan ulkopuolella. **Algebra on kuitenkin hyvin keskeinen työkalu melkein kaikilla matematiikan osa-alueilla.**

Algebran rooli matematiikan alana

Tällä kurssilla vastaan tulevia käsitteitä tarvitaan työkaluina ainakin seuraavissa:

- analyysi,
- logiikka,
- matemaattinen fysiikka,
- (algebrallinen) topologia,
- differentiaaligeometria,
- algebrallinen geometria,
- kompleksianalyysi

Algebran rooli matematiikan alana

Algebran syvällisiä teoreemoja tarvitaan ainakin seuraavissa:

- lukuteoria,
- kombinatoriikka,
- algebrallinen topologia,
- algebrallinen geometria.

Motivaatiosta

Motivaatiosta ja intohimosta

Tärkein motivaattori on EMOOTIO

Motion is emotion
-Tony Robbins

Mitkä emootiot auttavat algebran opiskelussa?

Mitkä emootiot saavat sinut oppimaan algebran kolminkertaisessa ajassa?

Syyllisyyden tunne

~~Syyllisyyden tunne~~

Ego-boost

Matematiikkaa on kivaa tehdä

Muita ehdotuksia?

Ylpeyden tunteen tavoittelu.