Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 2 - Ratkaisuehdotuksia

Tehtäväsarja I

1. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla $a * b = a^2 - 2b + 5$?

   Ratkaisuehdotus: Ei voi, sillä esimerkiksi 1 ja 7 ovat luonnollisia lukuja, mutta $1 * 7 = 1^2 - 2 \cdot 7 + 5 = -8$ ei ole.

2. Merkitään $X = \{0, 1, 2\}$. Olkoon potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ määritelty laskutoimitus $\triangle$ kuten viime viikon tehtävässä: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mitkä ovat alkioiden $\{1\}$ ja $\{0, 1, 2\}$ käänteisalkiot?

   Ratkaisuehdotus: Edellisen viikon harjoituksissa todistettiin Vennin diagrammeilla, että joukossa $G = \mathcal{P}(X)$ on laskutoimituksen $\triangle$ suhteen neutraalialkio $\emptyset$. Käänteisalkioiden löytämiseen voi käyttää esimerkiksi edellisen viikon tehtävän 16 ratkaisua ja päätellä sen pohjalta, mitkä ovat alkioiden $\{1\}$ ja $\{0, 1, 2\}$ käänteisalkiot. Vaihtoehtoisesti vastauksen voi myös päätellä kirjoittamalla auki ryhmän laskutoimitustaulun. Joukon G laskutoimitustaulu symmetrisen erotuksen $\triangle$ suhteen on seuraavanlainen:

$\triangle$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{0\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{0,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{0,1,2\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{0,1,2\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{0,2\}$	$\{2\}$
$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{0,1\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$

   Laskutoimitustaulusta voimme lukea, että alkion $\{1\}$ käänteisalkio on $\{1\}$ ja alkion $\{0, 1, 2\}$ käänteisalkio on $\{0, 1, 2\}$.

3. Miksi rationaalilukujen joukossa on huono määritellä laskutoimitus $\odot$ kaavalla

$$\frac{m}{n} \odot \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n^2 + l^2}.$$

   Tässä $m, k \in \mathbb{Z}$ ja $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

   Ratkaisuehdotus: Laskutoimitusta ei voi määritellä, koska tulos riippuu siitä, miten rationaaliluvut kirjoitetaan. Esimerkiksi rationaaliluvulla 1 on murtolukuesitykset $\frac{1}{1}$ ja $\frac{2}{2}$. Koska tietenkin halutaan, että $1 \odot 1 = 1 \odot 1$, niin täytyisi siis päteä

$\frac{1}{1} \odot \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \odot \frac{2}{2}$. Kuitenkin

$$\frac{1}{1} \odot \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1^2+1^2} = \frac{2}{2} \qquad \text{ja} \qquad \frac{2}{2} \odot \frac{2}{2} = \frac{2+2}{2^2+2^2} = \frac{4}{8},$$

mutta $\frac{2}{2}$ ja $\frac{4}{8}$ eivät esitä samaa rationaalilukua.

4.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkioilla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkiolla $x * y$ on käänteisalkio.

Ratkaisuehdotus: Olkoon e laskutoimituksen $*$ neutraalialkio, x' alkion x käänteisalkio ja y' alkion y käänteisalkio. Arvataan, että alkion $x*y$ käänteisalkio on $y'*x'$ ja todistetaan, että tämä todella toimii. Huomaa, että alla käytetään laskutoimituksen $*$ liitännäisyyttä.

$$(x * y) * (y' * x') = ((x * y) * y') * x' = (x * (y * y')) * x' = (x * e) * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$$

Oikean käänteisalkion voi arvata esim. hahmottelemalla laskuja ja päättelemällä. Esitetään kuitenkin vielä tapa, jolla käänteisalkioehdokkaan voi saada laskemalla. Näinkin saatu arvaus pitää kuitenkin todistaa oikeaksi, kuten yllä on tehty. Alla z esittää haluttua käänteisalkiota.

$$\begin{aligned}
& (x * y) * z = e \\
\Rightarrow \quad & x * (y * z) = e \\
\Rightarrow \quad & x' * (x * (y * z)) = x' * e \\
\Rightarrow \quad & (x' * x) * (y * z) = x' \\
\Rightarrow \quad & e * (y * z) = x' \\
\Rightarrow \quad & (y * z) = x' \\
\Rightarrow \quad & y' * (y * z) = y' * x' \\
\Rightarrow \quad & (y' * y) * z = y' * x' \\
\Rightarrow \quad & e * z = y' * x' \\
\Rightarrow \quad & z = y' * x'.
\end{aligned}$$

Tehtäväsarja II

5. Vanhassa autossa on mekaaninen matkamittari jossa on neljä pyörää joista jokaisessa on luvut 0-9:

Kun oikeanpuolimmainen pyörän näkyvä numero muuttuu 9:stä 0:ksi, toiseksi oikeanpuolimmainen pyärähtää yhden numeron verran eteenpäin. Samoin kun toiseksi oikeimmainen siirtyy 9:stä 0:ksi, niin vasemmalta toinen pyörähtää yhden numeron ja kun toinen vasemmalta siirtyy 9:stä 0:ksi niin vasemmanpuoleinen siirtyy yhden eteenpäin. Numero 9999 on viimeinen, jonka jälkeen seuraava on yllä olevan mukaan 0000. Kaikkia mahdollisia numerokombinaatioita on siis 10000. Olkoon S näiden kaikkien numerokombinaatioiden joukko.

(a) Miten määrittelisit laskutoimituksen joukkoon S niin että se vastaisi matkamittariin kuuluvaa intuitiota? (Intuitio: ensin kuljettiin $x$km ja sitten $y$km, paljonko matkamittari näyttää?)

(b) Tuleeko siitä ryhmä?

(c) Mikä muutos pitää tehdä tavalliseen allekkainlaskuun jotta se toimisi tämän laskutoimituksen kanssa sopusoinnussa?

Ratkaisuehdotus:

a) Laskutoimituksen voi määritellä kellotaulusumman tavoin siten, että alkioiden lukumäärä on 10000. Olkoot siis $x, y \in S$ ja merkitään tässä tutkittavaa laskutoimitusta merkillä $\mathbin{\text{◷}}$. Tällöin tutkimme kellotauluryhmää $K_{10000} =: S$, jossa $x \mathbin{\text{◷}} y = x + y$, jos $x + y < 10000$, ja $x \mathbin{\text{◷}} y = (x + y) - 10000$, jos $x + y > 10000$.

b) Tulee. Kirjan esimerkissä 3.9 (kolmas painos) mainitaan, että millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla n joukko K_n varustettuna kellotaulusummalla on vaihdannainen ryhmä.

c) Laskiessamme allekkain laskemme alkioita tavalliseen tapaan siihen asti, kunnes ylitämme luvun 9999. Tällöin viimeisenä muistiin laitettava luku unohdetaan, jolloin lasku alkaa ns. ”alusta”.

6. Määritellään joukossa $S = \{X, Y, Z\}$ laskutoimitus $\Box$ seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$\Box$	X	Y	Z
X	X	Z	Y
Y	Y	X	Z
Z	Z	Y	Y

Onko $(S, \Box)$ ryhmä?

Ratkaisuehdotus: Ei ole ryhmä, koska laskutoimituksella ei ole neutraalialkiota. Koska $X \Box Y = Z$, niin kumpikaan alkioista X ja Y ei ole neutraalialkio. Lisäksi $Z \Box Z = Y$, joten alkio Z ei sekään ole neutraalialkio.

Toinen tapa: Koska S on äärellinen, niin kirjan lauseen 3.12 (kirjan toinen painos: 3.10) mukaan jos S olisi ryhmä, niin sen laskutoimitustaulussa jokainen alkio esiintyisi täsmälleen kerran jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Tehtävän laskutoimitustaulussa kuitenkin alkio Y esiintyy alimmalla rivillä kaksi kertaa, joten $(S, \Box)$ ei voi olla ryhmä.

7. Määritellään reaalilukujen joukossa laskutoimitus $\oplus$ kaavalla $x \oplus y = 3xy$. Osoita, että $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ on ryhmä.

   Ratkaisuehdotus: Jos $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin myös $x \oplus y = 3xy \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja selvästi laskutoimituksen tulos on yksikäsitteinen. Näin ollen kyseessä on reaalilukujen joukon laskutoimitus. Nyt voidaan käydä läpi ryhmän ehdot (G1)-(G3).

   Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (G1) Reaalilukujen ominaisuuksien nojalla

   $$(x \oplus y) \oplus z = (3xy) \oplus z = 3(3xy)z = 9xyz$$

   ja toisaalta

   $$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (3yz) = 3x(3yz) = 9xyz$$

   Siis $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, joten laskutoimitus on liitännäinen.

   (G2) Koska $x \oplus \frac{1}{3} = 3x \cdot \frac{1}{3} = x$ ja $\frac{1}{3} \oplus x = 3 \cdot \frac{1}{3}x = x$ ja $\frac{1}{3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin $\frac{1}{3}$ on laskutoimituksen neutraalialkio.

   (G3) Alkion x käänteisalkio on $\frac{1}{9x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sillä $x \oplus \frac{1}{9x} = 3x \cdot \frac{1}{9x} = \frac{1}{3}$ sekä $\frac{1}{9x} \oplus x = 3 \cdot \frac{1}{9x}x = \frac{1}{3}$.

   Näin ollen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ on ryhmä.

8. Suljetulla välillä $I = [-2, 2]$ voidaan määritellä laskutoimitus $\boxdot$ kaavalla $a \boxdot b = \max\{a, b\}$. Onko $(I, \boxdot)$ ryhmä?

   Ratkaisuehdotus: Tämä ei ole ryhmä. Laskutoimituksella on kyllä neutraalialkio $-2 \in [-2, 2]$, koska kaikilla $a \in [-2, 2]$ pätee

   $$a \boxdot (-2) = \max\{a, -2\} = a \qquad \text{ja} \qquad (-2) \boxdot a = \max\{-2, a\} = a.$$

   Kuitenkaan esimerkiksi alkiolla $0 \in [-2, 2]$ ei ole käänteisalkiota. Jos nimittäin b olisi nollan käänteisalkio, niin täytyisi olla $0 \boxdot b = -2$. Mutta jokaisella $b \in [-2, 2]$ pätee

   $$0 \boxdot b = \max\{0, b\} \geq 0 > -2.$$

Tehtäväsarja III

9. Osoita, että $A = \{5, 10, 15\}$ on kellotauluryhmän K_{15} aliryhmä. Apuna kannattaa käyttää joukon A laskutoimitustaulua.

   Ratkaisuehdotus: Joukon A laskutoimitustaulu on

◷	5	10	15
5	10	15	5
10	15	5	10
15	5	10	15

   Käydään läpi aliryhmän ehdot. Ensinnäkin $A \subset K_{15}$, mikä on myös muistettava tarkistaa!

(H1) Laskutoimitustaulusta nähdään, että jos $g, h \in A$, niin myös $g \oplus h \in A$, eli A on vakaa (ts. suljettu) laskutoimituksen suhteen.

(H2) Ryhmän K_{15} neutraalialkio on 15 ja se löytyy joukosta A.

(H3) Alkiot 5 ja 10 ovat toistensa käänteisalkioita ja neutraalialkio 15 on oma käänteisalkionsa. Joukko A sisältää siis kaikkien alkioidensa käänteisalkiot.

Tämä todistaa, että A on ryhmän K_{15} aliryhmä.

10. Oletetaan, että H on kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, jossa on alkio 8. Osoita, että seuraavat alkiot kuuluvat aliryhmään H:

$$20, 16, 12, 4.$$

Ratkaisuehdotus:

- $20 \in H$, sillä se on ryhmän K_{20} neutraalialkio.
- Koska $8 \in H$, niin myös $16 = 8 \oplus 8 \in H$.
- Koska $8 \in H$, niin myös $4 = (8 \oplus 8) \oplus 8 \in H$. Vaihtoehtoisesti voidaan todeta, että 4 on alkion 16 käänteisalkio. Koska H sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot ja edellisen kohdan nojalla $16 \in H$, niin myös tästä syystä $4 \in H$.
- Koska äskeisen nojalla $4 \in H$ ja lisäksi $8 \in H$, niin myös $12 = 8 \oplus 4 \in H$. Toinen tapa on todeta, että 12 on alkion 8 käänteisalkio.

11. Onko $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että $\mathbb{R}_+$ on ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä. Selvästi $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Käydään sitten läpi muut aliryhmän ehdot.

(H1) Jos $x, y \in \mathbb{R}_+$ eli x ja y ovat aidosti positiivisia reaalilukuja, niin tunnetusti myös xy on aidosti positiivinen reaaliluku eli $xy \in \mathbb{R}_+$.

(H2) Ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ neutraalialkio on 1, joka läytyy joukosta $\mathbb{R}_+$.

(H3) Jos $x \in \mathbb{R}_+$, niin sen käänteisalkio kertolaskun suhteen, $1/x$, on myös aidosti positiivinen reaaliluku, joten $1/x \in \mathbb{R}_+$.

Tämä todistaa, että $\mathbb{R}_+$ on ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä.

Tehtäväsarja IV

12. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät?

(a) $8 \equiv 50 \pmod 6$ (b) $13 \equiv 4 \pmod{11}$ (c) $-4 \equiv 11 \pmod 5$

Ratkaisuehdotus:

(a) Väite pätee, koska $6 \mid (8 - 50)$.

(b) Väite ei päde, koska $11 \nmid (13-4)$.
(c) Väite pätee, koska $5 \mid (-4-11)$.

13. Keksi neljä alkiota, jotka ovat joukossa $[5]_7$.

    Ratkaisuehdotus:
    Esimerkiksi:

    - $5 \in [5]_7$, sillä $5 \equiv 5 \pmod 7$ eli $7 \mid (5-5)$.
    - $-2 \in [5]_7$, sillä $-2 \equiv 5 \pmod 7$ eli $7 \mid (-2-5)$.
    - $12 \in [5]_7$, sillä $12 \equiv 5 \pmod 7$ eli $7 \mid (12-5)$.
    - $47 = 6 \cdot 7 + 5 \in [5]_7$, sillä $47 \equiv 5 \pmod 7$ eli $7 \mid (47-5)$
    - $n \cdot 7 + 5 \in [5]_7$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, sillä $n \cdot 7 + 5 \equiv 5 \pmod 7$ eli $7 \mid (n \cdot 7 + 5 - 5)$, jos $n \in \mathbb{Z}$.

    Viimeinen esimerkki sisältää idean siitä, että jäännösluokka voidaan kirjoittaa myös muodossa $[a]_n = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

14.* Luettele jäännösluokkien $[6]_{10}$ ja $[26]_{10}$ alkiot. Vaikuttaako siltä, että $[6]_{10} = [26]_{10}$? Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

    Ratkaisuehdotus:

$$[6]_{10} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 6 \pmod{10}\} = \{\dots, -14, -4, 6, 16, 26, \dots\}$$
$$[26]_{10} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv 26 \pmod{10}\} = \{\dots, 6, 16, 26, 36, 46, \dots\}$$

    Koska luku 6 kuuluu molempiin luokkiin, vaikuttaa siltä, että $[6]_{10} = [26]_{10}$.

15. Ovatko jäännösluokat $[-3]_5$ ja $[21]_5$ samat? Miten ongelman voi ratkaista täsmällisesti, jäännösluokkien alkioita määrittämättä?

    Ratkaisuehdotus: Jäännösluokat eivät ole samat. Tämän voi arvata esimerkiksi listaamalla jäännösluokkien alkioita.

    Asia osoitetaan täsmällisesti keksimällä jokin alkio, joka on toisessa jäännösluokassa, muttei toisessa. Osoitetaan, että $-3 \in [-3]_5$, mutta $-3 \notin [21]_5$.

    Jäännösluokka $[-3]_5$ on määritelmän mukaan

$$[-3]_5 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv -3 \pmod 5\}.$$

    Tiedetään, että $-3 \equiv -3 \pmod 5$, joten $-3 \in [-3]_5$.

    Osoitetaan sitten, että $-3 \notin [21]_5$. Huomataan, että erotus $-3 - 21 = -24$ ei ole jaollinen luvulla viisi. Siten -3 ja 21 eivät ole kongruentteja modulo 5. Näin ollen $-3 \notin [21]_5$.

    Siten jäännösluokat $[-3]_5$ ja $[21]_5$ eivät ole samat.

Tehtäväsarja V

16.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Määritä alkiot b^4 ja d^{-2}. (Pelkkä vastaus ei riitä. Muista perustelut.)

Ratkaisuehdotus: a) Potenssin määritelmän nojalla $b^4 = bbbb = ((bb)b)b$. Laskutoimitustaulusta nähdään nyt, että $b^4 = ((bb)b)b = (cb)b = db = a$.

b) Negatiivisen potenssin määritelmän nojalla $d^{-2} = (d^2)^{-1}$ ja laskutoimitustaulun avulla saadaan $d^2 = dd = c$. Taulusta nähdään myös, että a on neutraalialkio ja että $cc = a$, eli $c^{-1} = c$. Näin ollen $d^{-2} = (d^2)^{-1} = c^{-1} = c$.

17. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $(xy)^2 = x^2y^2$. kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.

Ratkaisuehdotus: Olkoot $x, y \in G$. On osoitettava, että $xy = yx$. Oletuksen nojalla $(xy)^2 = x^2y^2$ ja potenssin määritelmän mukaan

$$(xy)^2 = (xy)(xy) \qquad \text{ja} \qquad x^2y^2 = (xx)(yy),$$

joten saadaan yhtälö

$$(xy)(xy) = (xx)(yy).$$

Kirjoittamalla sulut sopivasti nähdään, että haluttu tulos piilee yhtälön sisällä:

$$x(yx)y = x(xy)y.$$

Kertomalla tätä vasemmalta alkiolla x^{-1} ja oikealta alkiolla y^{-1} saadaan

$$(x^{-1}x)(yx)(yy^{-1}) = (x^{-1}x)(xy)(yy^{-1}) \qquad \text{eli} \qquad yx = xy.$$

Siispä G on vaihdannainen.

Ylimääräiset tehtävät

18. Kurssikirjassa on osoitettu, että ryhmän laskutoimitustaulussa kukin alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran (Lause 3.12 (2. painos 3.10)).

Oletetaan, että äärellisessä epätyhjässä joukossa S on määritelty laskutoimitus $*$. Jos kukin joukon alkio esiintyy laskutoimitustaulun jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran, onko $(S, *)$ välttämättä ryhmä?

Ratkaisuehdotus: Ehto ei takaa, että $(S, *)$ on ryhmä. Valitaan $S = \{a, b, c\}$, joka on äärellinen, epätyhjä joukko. Määritellään siinä seuraava laskutoimitus:

$$\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & b \\ b & b & a & c \\ c & c & b & a \end{array}$$

Tälläin jokainen joukon S alkio esiintyy täsmälleen kerran jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa. Tämä ei kuitenkaan ole ryhmän laskutoimitus, koska sillä ei ole neutraalialkiota. Nimittäin $a * b = c$, joten kumpikaan alkioista a ja b ei ole neutraalialkio ja lisäksi $c * c = a$, joten c:kään ei ole neutraalialkio.

19. Olkoon

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ja olkoon I yksikkömatriisi. Ratkaistaan yhtälö $(I - N)X = I$, missä $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\begin{aligned} & (I - N)X = I \\ \iff\ & X - NX = I \qquad || \cdot N \\ \iff\ & NX - N^2X = N \\ \iff\ & NX + OX = N \\ \iff\ & NX = N \qquad || \cdot N^{-1} \\ \iff\ & X = I \end{aligned}$$

(a) Tarkista, onko ykkösmatriisi I yhtälön ratkaisu.
(b) Mikä päättelyssä menee pieleen?

Ratkaisuehdotus:

a) Tarkistetaan yhtälön ratkaisu sijoillamalla ratkaistu $X = I$ alkuperäiseen yhtälöön:

$$(I - N)X = (I - N)I = I - N.$$

Nyt

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-(-1) \\ 0-1 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I.$$

Koska yhtälö on epätosi, ei $X = I$ ole yhtälön ratkaisu.

b) Päättelyssä ainoa ehto, joka ei välttämättä täyty, on matriisin N kääntyvyys. Lasketaan siis matriisin determinantti:

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0.$$

Matriisin N determinantti on nolla, joten se ei ole kääntyvä eli sillä ei ole olemassa käänteismatriisia. Näin ollen päättelyn virhe tapahtuu yhtälönratkaisun neljännessä ekvivalenssinuolessa.