Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 1 - Ratkaisuehdotuksia

Tehtäväsarja I

1. Määritä kellonajat $3 ◷ 8$, $10 ◷ 6$ ja $12 ◷ 8$.

   Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned} 3 ◷ 8 &= 11 \\ 10 ◷ 6 &= 4 \\ 12 ◷ 8 &= 8 \end{aligned}$$

2. Ranskan vallankumouksen jälkeen Ranskassa käytettiin muutaman vuoden desimaaliaikaa kuten myös Kiinassa satojen vuosien ajan. Kellotaulussa oli siis 10 tuntia (12 tai 24 sijaan). Tarkastele kellotaulusummaa joukossa $K_{10} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Mitä saat nyt tulokseksi edellisen tehtävän laskuista?

   Ratkaisuehdotus:

   $3 ◷ 8 = 1$
   $10 ◷ 6 = 6$
   Laskutoimitusta $12 ◷ 8$ ei ole määritelty, sillä alkio 12 ei kuulu joukkoon K_{10}.

Tehtäväsarja II

3. Oheinen laskutoimitustaulu kertoo miten kaverusjoukon $\{Maijukka, Galaktion, Luiisa, Ylermi\}$ juoruilu toimii. Kun kaverukset x ja y tapaavat kahdestaan, ne juoruvat aina kaverista $x \circledast y$. Mikäli $x = y$ tämä kertoo sen henkilön z, josta x aina puhuu kaikille (saattaa olla hän itse). Kutsutaan tätä laskutoimitusta juorukertolaskuksi.

$\circledast$	Maijukka	Galaktion	Luiisa	Ylermi
Maijukka	Ylermi	Maijukka	Luiisa	Galaktion
Galaktion	Maijukka	Galaktion	Luiisa	Ylermi
Luiisa	Luiisa	Luiisa	Ylermi	Maijukka
Ylermi	Galaktion	Ylermi	Maijukka	Ylermi

   Määritä seuraavat kaverukset: Luiisa $\circledast$ Galaktion, Maijukka $\circledast$ Ylermi, Luiisa $\circledast$ Maijukka.

   Ratkaisuehdotus:

$$\begin{aligned} \text{Luiisa} \circledast \text{Galaktion} &= \text{Luiisa} \\ \text{Maijukka} \circledast \text{Ylermi} &= \text{Galaktion} \\ \text{Luiisa} \circledast \text{Maijukka} &= \text{Luiisa} \end{aligned}$$

Tehtäväsarja III

4. Osoita, että tehtävän 3 juorukertolasku ei ole liitännäinen.

   Ratkaisuehdotus: Nähdään, että

$$\text{Maijukka} \circledast (\text{Luiisa} \circledast \text{Ylermi}) = \text{Maijukka} \circledast \text{Maijukka} = \text{Ylermi}$$

ja

$$(\text{Maijukka} \circledast \text{ Luiisa}) \circledast \text{Ylermi} = \text{ Luiisa} \circledast \text{Ylermi} = \text{Maijukka}.$$

Siten laskutoimitus ei ole liitännäinen.

5. Tehtävän 3 juorukertolasku on vaihdannainen. Miten se näkyy laskutoimitustaulussa?

   Ratkaisuehdotus: Huomataan, että laskutoimitustaulu on symmetrinen lävistäjän suhteen. Se kertoo laskutoimituksen vaihdannaisuudesta.

6. Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x*y = x^2+y^2$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

   Ratkaisuehdotus: Valitaan $x = 2$, $y = 1$ ja $z = 1$. Nyt $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x^2 + y^2) * z = (x^2 + y^2)^2 + z^2 = (2^2 + 1^2)^2 + 1^2 = 5^2 + 1 = 26\\ x * (y * z) &= x * (y^2 + z^2) = x^2 + (y^2 + z^2)^2 = 2^2 + (1^2 + 1^2)^2 = 4 + 2^2 = 8\end{aligned}$$

   Näin ollen kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ ei päde $(x*y)*z = x*(y*z)$, joten laskutoimitus $*$ ei ole liitännäinen.

7.⋆ Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x * y = x - xy - y$. Onko laskutoimitus vaihdannainen? (Muista perustella vastauksesi huolellisesti.)

   Ratkaisuehdotus: Valitaan $x = 1$ ja $y = 2$. Nyt $x, y \in \mathbb{Z}$ ja

$$\begin{aligned}x * y &= x - xy - y = 1 - (1 \cdot 2) - 2 = -3 \text{ sekä}\\ y * x &= y - yx - x = 2 - (2 \cdot 1) - 1 = -1.\end{aligned}$$

   Näin ollen kaikilla $x, y \in \mathbb{Z}$ ei päde $x * y = y * x$. Siis laskutoimitus $*$ ei ole vaihdannainen.

8.⋆ Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus $*$ kaavalla $x*y = 2xy$. Onko laskutoimitus liitännäinen?

   Ratkaisuehdotus: Oletetaan, että $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nyt

$$(x * y) * z = 2(2xy)z = 2 \cdot 2xyz = 2x \cdot 2yz = 2x(2yz) = x * (y * z).$$

   Näin ollen laskutoimitus $*$ on liitännäinen.

Tehtäväsarja IV

9. Määritä joukon K_{12} kellotaulusumman neutraalialkio.

   Ratkaisuehdotus: Kaikilla $a \in K_{12}$ pätee $a \oplus 12 = a$ ja $12 \oplus a = a$. Siten 12 on neutraalialkio.

10. Jatkoa edelliseen tehtävään. Mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot?

    Ratkaisuehdotus: Alkion 12 käänteisalkio on 12, sillä $12 \oplus 12 = 12$. Oletetaan, että $a \in K_{12}$ mutta $a \neq 12$. Tällöin alkion a käänteisalkio on $12 - a$, mikä nähdään seuraavasti. Ensinnäkin $12 - a \in K_{12}$. Lisäksi $a \oplus (12 - a) = 12$ ja $(12 - a) \oplus a = 12$. Siten $12 - a$ on alkion a käänteisalkio.

11. Mikä on neutraalialkio ja mitkä ovat alkioiden käänteisalkiot, jos tutkitaankin kellotaulusummaa joukossa $K_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

    Ratkaisuehdotus: Neutraalialkio on 6. Alkio 6 on itsensä käänteisalkio ja alkion $a \in K_6 \setminus \{6\}$ käänteisalkio on $6 - a$. Perustelut ovat samanlaiset kuin yllä.

12. Tehtävän 3 juorukertolaskulla on neutraalialkio. Mikä se on? Millä kaveruksilla on käänteiskaverukset?

    Ratkaisuehdotus: Laskutoimitustaulun ja neutraalialkion määritelmän perusteella Galaktion on juorukertolaskun neutraalialkio. Taulusta nähdään suoraan, että Maijukka on Ylermin käänteisalkio, Galaktion on oma käänteisalkionsa, Luiisalla ei ole käänteisalkiota ja Ylermin käänteisalkio on Maijukka.

13. Merkitään $A = \{1,2\}$. Tutkitaan potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$. Yhdisteoperaatio $\cup$ on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen $\cup$ neutraalialkio?

Ratkaisuehdotus:

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Laskutoimituksen $\cup$ neutraalialkio on tyhjä joukko, sillä $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$ kaikilla $X \in \mathcal{P}(A)$.

14.* Tutkitaan edelleen potenssijoukkoa $\mathcal{P}(A)$, missä A on kuten edellisessä tehtävässä. Leikkausoperaatio $\cap$ on joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitus. Kirjoita sen laskutoimitustaulu. Mikä on laskutoimituksen $\cap$ neutraalialkio?

Ratkaisuehdotus:

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$

Laskutoimituksen $\cap$ neutraalialkio on joukko $A = \{1,2\}$, sillä laskutoimitustaulun perusteella $X \cap A = A \cap X = X$ kaikilla $X \in \mathcal{P}(A)$.

15. Olkoon X joukko. Määritä neutraalialkio ja ne potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ alkiot, joilla on käänteisalkio laskutoimituksen $\cap$ suhteen.

Ratkaisuehdotus: Potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ neutraalialkio laskutoimituksen $\cap$ suhteen on joukko X, sillä $X \cap A = A$ ja $A \cap X = A$, kaikilla $A \in \mathcal{P}(X)$. Koska $X \cap X = X$, on joukko X itsensä käänteisalkio.

Osoitetaan seuraavaksi, että muilla potenssijoukon alkioilla ei ole käänteisalkiota. Oletetaan, että $B \in \mathcal{P}(X)$ ja $B \neq X$. (Toisin sanoen $B \subset X$ ja $B \neq X$.) Oletetaan vastoin väitettä, että $C \in \mathcal{P}(X)$ on B:n käänteisalkio. Nyt siis $B \cap C = X$.

Koska $B \subset X$ ja $B \neq X$, on olemassa alkio $a \in X$, jolle pätee $a \notin B$. Koska oletimme, että $B \cap C = X$, pätee nyt $a \in B \cap C$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $a \notin B$. Päädytään ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. Siten alkiolla B ei ole käänteisalkiota.

Näin ollen potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ ainoa alkio, jolla on käänteisalkio, on joukko X.

16. Olkoon X joukko ja olkoon $G = \mathcal{P}(X)$ sen potenssijoukko. Määritellään operaatio $\triangle$ symmetrinen erotus kaikille $a, b \in G$ kaavalla

$$a \triangle b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$$

Osoita että näin määritelty laskutoimitus G:ssä toteuttaa:

(a) se on liitännäinen

(b) G:ssä on $\triangle$:n suhteen neutraalialkio,

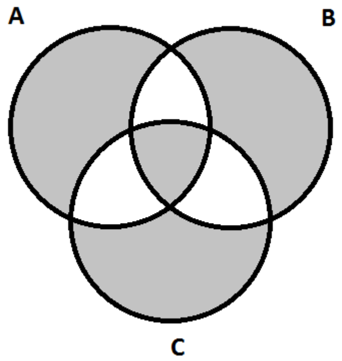
(c) jokaisella alkiolla $a \in G$ on käänteisalkio,

(d) laskutoimitus on vaihdannainen.

Huom: riittää todistaa käyttämällä Venn-diagrammeja! Laskuja ei tarvitse kirjoittaa auki.

Ratkaisuehdotus:

(a) Olkoon $A, B, C \in G$ epätyhjiä joukkoja. Huomataan, että jos piirretään joukot $(A \triangle B) \triangle C$ ja $A \triangle (B \triangle C)$ Venn-diagrammeina, päädytään molemmissa tapauksissa seuraavaan joukoon:



Eli $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ ja siten symmetrinen erotus on liitännäinen.

(b) Huomataan, että jokaiselle alkiolle $a \in G$ pätee

$$a \triangle \emptyset = (a \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus a) = a \cup \emptyset = a \text{ sekä}$$
$$\emptyset \triangle a = (\emptyset \setminus a) \cup (a \setminus \emptyset) = \emptyset \cup a = a,$$

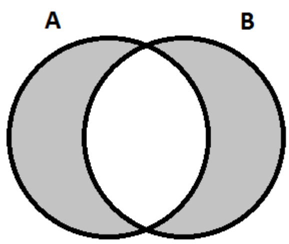
eli G:n neutraalialkio $\triangle$:n suhteen on $\emptyset$.

(c) Huomataan, että jokaiselle alkiolle $a \in G$ pätee

$$a \triangle a = (a \setminus a) \cup (a \setminus a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,$$

eli kaikki G:n alkiot ovat itsensä käänteisalkio, joten kaikilla alkioilla on käänteisalkio.

(d) Olkoon $A, B \in G$ epätyhjiä joukkoja. Kuten (a)-kohdassa, piirretään Venn-diagrammeja joukoista $A \triangle B$ ja $B \triangle A$. Molemmissa tapauksessa saamme seuraava joukko:



Pätee siis että $A \triangle B = B \triangle A$, eli laskutoimitus on vaihdannainen.

Tehtäväsarja V

17. Mitkä seuraavista pitävät paikkansa?

$$8 \mid -64, \quad 4 \mid 11, \quad 0 \mid 5$$

Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

Ratkaisuehdotus:

- Koska $-64 = (-8) \cdot 8$, niin $8 \mid -64$.

- Koska $k \cdot 4 \neq 11$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $4 \nmid 11$.
- Koska $k \cdot 0 \neq 5$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $0 \nmid 5$.

18. Määritä seuraavissa tapauksissa luvun a jakojäännös luvulla b jaettaessa. Perustele vastauksesi jakojäännöksen määritelmän avulla.

(a) $a = 22$ ja $b = 4$ (b) $a = 15$ ja $b = -3$ (c) $a = -14$ ja $b = 3$

Ratkaisuehdotus:

(a) Koska $5 * 4 + 2 = 22$, jakojäännös on 2.
(b) Koska $(-5) * (-3) + 0 = 15$, jakojäännös on 0.
(c) koska $(-5) * 3 + 1 = -14$, jakojäännös on 1.

19. Etsi väliltä $[-20, 20]$ kuusi eri lukua, joiden jakojäännös luvulla 7 jaettaessa on 2.

Ratkaisuehdotus: Etsitään siis joku luku $x \in [-20, 20]$, niin että $x = k * 7 + 2$, jollakin kokonaisluvulla k. Huomataan, että

$$
\begin{aligned}
&(-3) * 7 + 2 = -19, \\
&(-2) * 7 + 2 = -12, \\
&(-1) * 7 + 2 = -5, \\
&0 * 7 + 2 = 2, \\
&1 * 7 + 2 = 9, \\
&2 * 7 + 2 = 16.
\end{aligned}
$$

Väliltä $[-20, 20]$ löydetään siis luvut $-19, -12, -5, 2, 9$ ja 16, joiden jakojäännös luvulla 7 jaettaessa on 2.

Ylimääräinen tehtävä

20. Oletetaan, että $*$ on joukossa S määritelty laskutoimitus. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

(a) Jokaisella $a \in S$ pätee $(a * a) * a = a * (a * a)$.
(b) Joukon S alkiolla voi olla useita käänteisalkioita laskutoimituksen $*$ suhteen.

Ratkaisuehdotus: a) Väite ei pidä paikkaansa. Jos joukossa $\mathbb{Z}$ määritellään laskutoimitus $\bullet$ asettamalla $x \bullet y = x^y$, niin

$$3 \bullet (3 \bullet 3) = 3^{(3^3)} = 3^{27}$$

ja

$$(3 \bullet 3) \bullet 3 = (3^3)^3 = 3^9 \neq 3^{27}$$

eikä $\bullet$ ole tällöin liitännäinen. Keksitkö itse lisää esimerkkejä?

b) Määritellään joukon $S = \{e, a, b\}$ laskutoimitus $*$ seuraavasti:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

Nyt e on neutraalialkio. Alkion a käänteisalkioita ovat sekä a että b. Siten väite pitää paikkansa. Muuttuuko tilanne, jos laskutoimitukselta vaaditaan liitännäisyys?