Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 7 (Kertaustehtäviä, joita ei palauteta tai tarkasteta)

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: Ei palauteta
Korjausten viimeinen palautuspäivä: Ei palauteta

Info: Kokeessa pitää perustella vastaukset huolellisesti paitsi jos tehtävässä selkeästi ohjeistetaan toisin.

1. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Oletetaan lisäksi että J on myös ryhmä ja $f: G \to J$ on isomorfismi. Osoita, että fH on ryhmän J aliryhmä.

2. Ratkaise ryhmässä S_4 yhtälö $(12)x(123) = (34)^3$. Kirjoita vastaus sievennetyssä muodossa.

3. Olkoon $H = \{(1), (123), (132)\}$ ryhmän S_3 aliryhmä.
   (a) Osoita että H on syklinen,
   (b) Määritä H:n kaikki vasemmat sivuluokat.

4. Tiedetään, että ryhmä G on syklinen ja siinä on 13 alkiota. Olkoon $h \in G$ jokin alkio, jolle $h \neq e$. Osoita, että $h^5 \neq e$.

5. (a) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \qquad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \qquad -[4]_5 = [6]_5$$

   .

   (b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

   Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

6. (a) Määritä ryhmän $\mathbb{Q}^* = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä $H = \langle 17 \rangle$.
   (b) Osoita että H on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa, eli että $H \cong (\mathbb{Z}, +)$.

7. Olkoon $G = (\mathbb{R}^*, \star)$ ja $H = (\mathbb{R}^*, \oplus)$, missä $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \star y = xy$ (tavallinen tulo) ja $x \oplus y = 3xy$.
   (a) Osoita että H on ryhmä.
   (b) Oletetaan tunnetuksi, että G on ryhmä. Osoita että $G \cong H$, eli ryhmät ovat isomorfiset.

8. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, missä yhteenlaskuna on siis summa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Osoita, että

$$N = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

on $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$:n syklinen aliryhmä. Listaa sivuluokan $(-2, 1) + N$ alkiot.

9. Olkoon $X = \{1, -1, i, -i\}$ ja olkoon tässä joukossa laskutoimitus määritelty seuraavalla laskutoimitustaululla:

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

(a) Osoita, että $(X, \cdot)$ on syklinen ryhmä.

(b) Osoita, että se on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +)$ kanssa.

(c) Osoita, että sen aliryhmä $\langle -1 \rangle$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_2$ kanssa.

10. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja olkoon $\star$ joukossa A määritelty laskutoimitus siten että $(A, \star)$ on ryhmä, jonka neutraalialkio on 1. Mitä on $2 \star 2$?

11. Olkoon X kaikkien bijektioiden joukko joukosta $\{1, 2, 3, 4\}$ itselleen. Osoita, että X on ryhmä, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Olkoon $Y \subset X$ niiden bijektioiden f joukko, joille pätee $f(2) = 2$. Osoita, että Y on aliryhmä.

12. Olkoon $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$ kuvaus $f(n) = [n]_8$.

(a) Osoita että kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$ pätee

$$f(n + m) = f(n) + f(m).$$

(b) Miksi f ei ole isomorfismi?

13.

14. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja $(H, \cdot)$ vaihdannainen ryhmä. Oletetaan, että $f \colon G \to H$ on isomorfismi. Osoita, että G on vaihdannainen.

15. (a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K. Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä.

(b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K, joiden tulo HK ei ole G:n aliryhmä.

16. Piirrä itsellesi käsitekartta, josta löytyvät ainakin seuraavat sanat: aliryhmä, bijektio, isomorfismi, jäännösluokka, kertaluku, käänteisalkio, laskutoimitus, laskutoimitustaulu, liitännäisyys, monikerta, neutraalialkio, permutaatio, potenssi, ryhmä, sykli, syklinen ryhmä, symmetrinen ryhmä, sivuluokka, vaihdannaisuus, vasta-alkio, virittäminen, ekvivalenssirelaatio.

17. Mikä on ryhmän $(\mathbb{Z}_8, +) \times (\mathbb{Z}_6, +)$ alkion $a = ([2]_8, [3]_6)$ kertaluku? Mitkä ovat aliryhmän $\langle a \rangle$ alkiot?

18. Olkoon

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

   (a) Osoita, että A on ryhmä matriisikertolaskun suhteen.

   (b) Osoita, että se on syklinen ryhmä.

19. Olkoon $G = (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_3, +)$ tuloryhmä ja $(H, \star)$ joku ryhmä ja $f\colon G \to H$ on isomorfismi. Osoita, että ryhmästä H löytyy

   (a) alkio h, jolle pätee $h^3 = e$,

   (b) alkio h, jolle pätee $h^4 = e$,

   (c) alkio h, jolle pätee $o(h) = 12$.

20. Tarkastellaan ryhmää S_4.

   (a) Päteekö $(14)(123) = (1234)$? Päteekö $(14)^3(123) = (1234)$?

   (b) Mikä on alkion $(12)(34)$ käänteisalkio?

   (c) Mitä on $((14)(123))^4$?

   (d) Onko $\{(1), (12)\}$ aliryhmä?

   (e) Onko $\{(1), (123)\}$ aliryhmä?

   (f) Määritä sivuluokka $(12)\,\langle(34)\rangle$.

21. Tarkastellaan ryhmää Z_4.

   (a) Päteekö $[3]_4 + [-2]_4 = [5]_4$? Päteekö $5 \cdot [3]_4 + [-2]_4 = [1]_4$?

   (b) Mikä on alkion $[1]_4$ käänteisalkio?

   (c) Mitä on $4 \cdot ([3]_4 + [-2]_4)$?

   (d) Onko $\{[0]_4, [2]_4\}$ aliryhmä?

   (e) Onko $\{[0]_4, [3]_4\}$ aliryhmä?

   (f) Määritä sivuluokka $[1]_4 + \langle [2]_4 \rangle$.