Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 6 - Ratkaisuehdotuksia

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että G on ryhmä, jonka neutraalialkio on e. Oletetaan lisäksi, että alkiolle $g \in G$ pätee $g^5 = e$. Lauseen 6.2 mukaan $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, mutta toisaalta tiedetään, että $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, g^4\}$. Miten selität tämän? Minne katoavat potenssit $g^5, g^6, g^7 \dots$ ja $g^{-1}, g^{-2}, \dots$? Voit havainnollistaa selitystäsi kuvan avulla.

   Ratkaisuehdotus: Potenssit $g^5, g^6, g^7 \dots$ ja $g^{-1}, g^{-2}, \dots$ eivät katoa minnekään, vaan ovat kyllä mukana joukossa $\{g^1, g^2, g^3, g^4, g^5\}$. Äärellisen syklisen ryhmän tapauksessa tietyn potenssin jälkeen aletaan saada samoja alkioita kuin aiemmista potensseista ja tämä toistuu loputtomiin. Esimerkiksi $g^6 = g^{5+1} = g^5 g^1 = eg^1 = g$. Myös negatiiviset eksponentit tuottavat samoja alkioita. Esimerkiksi $g^{-2} = g^{5(-1)+3} = g^{5(-1)}g^3 = (g^5)^{-1}g^3 = e^{-1}g^3 = g^3$.

2. Osoita, että matriisiryhmä
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$
   on syklinen. (Laskutoimituksena on matriisien kertolasku.)

   Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että matriisi $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ virittää aliryhmän. Sitä varten osoitetaan, että $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]^n = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, jolloin väite seuraa lauseesta 6.2.

   Osoitetaan ensin induktiolla, että $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]^n = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ kaikilla *luonnollisilla* luvuilla n.

   - *Alkuaskel:* Ryhmän neutraalialkio on $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, joten potenssin määritelmän nojalla
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
     eli väite pätee luvulla 0.
   - *Induktioaskel:* Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$ on sellainen, jolla väite pätee. Nyt potenssin määritelmän mukaan
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{(I.O.)}}{=} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
     joten väite pätee myös luvulla $n + 1$.

   Induktioperiaatteen nojalla siis $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]^n = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos taas $n \in \mathbb{Z}$ ja $n < 0$, niin $-n \in \mathbb{N}$ ja tällöin äskeisen nojalla
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-n} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (Kohdan $(*)$ voi todeta esimerkiksi laskemalla $\left[\begin{smallmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.) Siten väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Nyt lauseesta 6.2 saadaan
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

eli $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ virittää annetun ryhmän.

Toinen tapa. Merkitään annettua ryhmää U:lla. Samalla tavalla kuin harjoituksen 5 tehtävässä 2 voidaan osoittaa, että kuvaus $f : U \to \mathbb{Z}$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mapsto a$, on isomorfismi. Koska isomorfismi säilyttää syklisyyden (tämän harjoituksen myöhempi tehtävä) ja $\mathbb{Z}$ on syklinen, niin myös U:n on oltava.

Seuraavissa tehtävissä voi olla myös apua Lemmasta 8.11: Oletetaan, että G on ryhmä ja $g \in G$. Jos $g^m = e$, alkion g kertaluku jakaa luvun m. (Tätä ei taida olla toisessa painoksessa)

3. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on n alkiota. Olkoon $g \in G$. Osoita että $g^n = e$.

   Ratkaisuehdotus: Oletetaan, että $g \in G$, ja osoitetaan, että $g^n = e$.

   Koska oletamme, että G on syklinen ja että siinä on n alkiota, on se jonkin alkion virittämä ryhmä. Olkoon tämä alkio nyt $q \in G$, jolla pätee $\langle q \rangle = G$. Näin ollen oletuksestamme seuraa, että $q^n = e$. Lisäksi, koska alkio q virittää ryhmän G, saamme alkion g ilmaistua jonain virittäjäalkion q potenssina, eli $q^k = g$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Nyt

   $$g^n = (q^k)^n \overset{L.3.10.}{=} q^{kn} = q^{nk} = (q^n)^k = e^k = e,$$

   eli $g^n = e$.

4. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on 29 alkiota. Olkoon $g \in G$, $g \neq e$. Osoita että $g^{19} \neq e$.

   Ratkaisuehdotus:

   Oletetaan, että $g \in G, g \neq e$, ja osoitetaan, että $g^{19} \neq e$. Tehdään vastaoletus:

   Oletetaan, että $g^{19} = e$. Nyt lemman 8.11. nojallla tiedämme, että alkion g kertaluku jakaa luvun 19. Koska 19 on alkuluku, on alkion g kertaluku joko 19 tai 1. Jos alkion g kertaluku on 1, niin $g^1 = g = e$, mikä on vastoin oletusta. Toisaalta, jos alkion g kertaluku on 19, päädymme myös ristiriitaan: edellisen tehtävän nojalla pätee $g^{29} = e$, joten alkion g kertaluvun tulisi jakaa myös 29, mutta $29/19 = 1 \cdot 19 + 10$, mikä on ristiriita.

   Päädymme ristiriitaan kummassakin tapauksessa, joten $g^{19} \neq e$.

5. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on 33 alkiota. Olkoon $g \in G$, $g \neq e$. Osoita että $g^4 \neq e$, mutta että ryhmässä on alkio h, jolle pätee $h^3 = e$.

   Ratkaisuehdotus:

   Oletetaan, että $g \in G, g \neq e$, ja osoitetaan, että $g^4 \neq e$. Kuten edellisessä tehtävässä, teemme nytkin vastaoletuksen:

   Oletetaan, että $g^4 = e$. Lemman 8.11. nojalla tiedämme, että alkion g kertaluvun tulisi jakaa luvun 4 ja kahden edellisen tehtävän nojalla tiedämme, että kertaluvun tulisi myös jakaa luku 33. Ainoa luku, joka on yhteinen tekijä sekä luvulle 4 että luvulle 33 on 1, mutta tällöin $g^1 = e$, mikä on vastoin oletusta. Näin ollen on pädettävä, että $g^4 \neq e$.

   Osoitetaan sitten, että ryhmässä G on alkio h, jolla pätee $h^3 = e$. Koska G on syklinen, tiedämme, että sen virittää yksi alkio. Olkoon q ryhmän G virittäjäalkio. Tällöin $q^{33} = e$, sillä ryhmässä G on 33 alkiota. Lisäksi tiedämme, että jokainen ryhmän G alkio on jokin virittäjäalkion q potenssi. Koska haluamme osoittaa, että ryhmässä G on alkio h, jolla pätee

$h^3 = e$, voimme valita alkion h sopivasti siten, että se on virittäjäalkion q jokin potenssi ja toteuttaa halutun yhtälön. Valitaan siis, että $h = q^{11}$, jolloin $h \in G$. Tällöin

$$h^3 = (q^{11})^3 = q^{3 \cdot 11} = q^{33} = e,$$

joten ryhmässä G on alkio h, jolla pätee $h^3 = e$.

Tehtäväsarja II

6.* Oletetaan, että G on ryhmä ja $g \in G$. Oletetaan lisäksi, että $o(g) = 4$. Selvitä lauseen 8.9 avulla alkioiden g^2 ja g^3 kertaluvut. (Kurssikirjan 2. painoksessa lauseen numero on 6.9.)

Ratkaisuehdotus: Lauseen 6.9 mukaisesti alkion kertaluku tarkoittaa pienintä $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, jolla $g^n = e$. Käydään nyt mahdollisia kertalukuja järjestyksessä läpi, kunnes saadaan tulokseksi neutraalialkio. Tutkitaan ensin alkiota g^2:

- $n = 1$: $(g^2)^1 = g^2$. Koska $2 < 4$, niin $g^2 \neq e$. Näin ollen 1 ei voi olla alkion g^2 kertaluku.
- $n = 2$: $(g^2)^2 = g^{2 \cdot 2} = g^4 = e$, joten alkion g^2 kertaluku on 2.

Samalla tavoin toimitaan alkion g^3 tapauksessa:

- $n = 1$: $(g^3)^1 = g^3$. Koska $3 < 4$, niin $g^3 \neq e$. Näin ollen 1 ei voi olla g^3:n kertaluku.
- $n = 2$: $(g^3)^2 = g^{3 \cdot 2} = g^6 = g^{4+2} = g^4 \cdot g^2 = e \cdot g^2 = g^2 \neq e$, joten 2 ei voi olla g^3:n kertaluku.
- $n = 3$: $(g^3)^3 = g^{3 \cdot 3} = g^9 = g^{4+4+1} = g^4 \cdot g^4 \cdot g^1 = e \cdot e \cdot g^1 = g^1 \neq e$, joten 3 ei voi olla g^3:n kertaluku.
- $n = 4$: $(g^3)^4 = g^{3 \cdot 4} = g^{12} = g^{4+4+4} = g^4 \cdot g^4 \cdot g^4 = e \cdot e \cdot e = e$, joten alkion g^3 kertaluku on 4.

Saatiin siis, että g^2:n kertaluku on 2 ja g^3:n kertaluku on 4.

7. Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä ja $f \colon G \to H$ on ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos H on syklinen, niin myös G on syklinen.

Ratkaisuehdotus: Koska H on syklinen, niin löytyy sellainen $h \in H$, että $\langle h \rangle = \{h^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = H$. Tiedetään myös, että koska f on ryhmäisomorfismi, niin sen käänteiskuvaus $f^{-1} : H \to G$ on olemassa ja on myöskin ryhmäisomorfismi. Nyt f^{-1}:n isomorfisuuden ja H:n syklisyyden nojalla saadaan $\langle f^{-1}(h) \rangle = \{(f^{-1}(h))^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(f^{-1}(h^n)) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(f^{-1}(a)) \mid a \in H\} = \{b \in G \mid b = (f^{-1}(a)) \text{ jollakin } a \in H\} = G$. Siis G on syklinen ryhmä ja sen virittää alkio $f^{-1}(h)$.

Tehtäväsarja III

Ryhmällä $\mathbb{Z}_8$ on aliryhmä $H = \{[0]_8, [4]_8\}$. Määritellään joukon $\mathbb{Z}_8$ relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$[a]_8 \sim [b]_8, \quad \text{jos} \quad -[a]_8 + [b]_8 \in H.$$

Kyseessä on ekvivalenssirelaatio samaan tapaan kuin harjoituksen 5 tehtävässä 16.

8. Mitä alkioita on jäännösluokan $[1]_8$ ekvivalenssiluokassa?

   Ratkaisuehdotus: Määritelmän mukaan

$$[[1]_8] = \{[a]_8 \mid -[1]_8 + [a]_8 \in H\}.$$

   Koska $H = \{[0]_8, [4]_8\}$, niin ekvivalenssiluokkaan $[[1]_8]$ kuuluvat kaikki alkiot $[a]_8 \in \mathbb{Z}_8$, joille pätee $-[1]_8 + [a]_8 = [0]_8$ tai $-[1]_8 + [a]_8 = [4]_8$. Saadaan $[a]_8 = [0]_8 + [1]_8 = [1]_8$ tai $[a]_8 = [4]_8 + [1]_8 = [5]_8$. Siis

$$[[1]_8] = \{[1]_8, [5]_8\}.$$

9. Määritä kaikkien ekvivalenssiluokkien alkiot. Montako ekvivalenssiluokkaa on yhteensä?

   Ratkaisuehdotus: Kuten edellisessä tehtävässä, saamme alkion $[a]_8 \in \mathbb{Z}_8$ ekvivalenssiluokaksi

$$[[a]_8] = \{[a]_8, [a+4]_8\}.$$

   Niinpä

   - $[[0]_8] = \{[0]_8, [4]_8\}$
   - $[[1]_8] = \{[1]_8, [5]_8\}$
   - $[[2]_8] = \{[2]_8, [6]_8\}$
   - $[[3]_8] = \{[3]_8, [7]_8\}$.

   Näihin ekvivalenssiluokkiin sisältyvät kaikki joukon $\mathbb{Z}_8$ alkiot. Koska ekvivalenssiluokat muodostavat osituksen, ei ekvivalenssiluokkia ole enempää. Siten ekvivalenssiluokkia on neljä.

Tehtäväsarja IV

10. Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}_8$ aliryhmää $H = \{[0]_8, [4]_8\}$. Määritä sivuluokan $[2]_8 + H$ alkiot. Vertaa tulosta tehtävään 9. Mitä huomaat?

    Ratkaisuehdotus: $[2]_8 + H = \{[2]_8 + h \mid h \in \{[0]_8, [4]_8\}\} = \{[2]_8, [6]_8\}$. Saatiin sama joukko kuin $[[2]_8]$.

11. Tutkitaan ryhmän S_3 aliryhmää $B = \{(1), (23)\}$. Määritä sivuluokan $(12)B$ alkiot. Päteekä $(12)B = (123)B$?

    Ratkaisuehdotus:
    $(12)B = (12)\{(1), (23)\} = \{(12)(1), (12)(23)\} = \{(12), (123)\}$
    $(123)B = (123)\{(1), (23)\} = \{(123)(1), (123)(23)\} = \{(123), (12)\}$
    Siis $(12)B = (123)B$.

12. Ryhmällä $\mathbb{Q}$ on aliryhmä $\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokan $\frac{7}{2} + \mathbb{Z}$ alkiot.

    Ratkaisuehdotus: $\frac{7}{2} + \mathbb{Z} = \{\frac{7}{2} + h \mid h \in \mathbb{Z}\} = \{..., -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}...\}$.

Tehtäväsarja V

13.* Kvaternioryhmän[1] $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ kertotaulu on

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Ryhmällä Q_8 on aliryhmä $Z = \{1, -1\}$. Määritä aliryhmän Z vasempien sivuluokkien joukko Q_8/Z. Muista perustella vastauksesi.

Ratkaisuehdotus:

Tapa 1:
Etsitään mahdollisia sivuluokkia määritelmän perusteella:

$$\begin{aligned} 1N &= N = \{-1, 1\} \\ iN &= i\{1, -1\} = \{i, -i\} \\ jN &= j\{1, -1\} = \{j, -j\} \\ kN &= k\{1, -1\} = \{k, -k\}. \end{aligned}$$

Tässä vaiheessa huomataan, että löydettiin neljä sivuluokkaa, jotka ovat keskenään eri joukkoja. Toisaalta jokainen ryhmän Q_8 alkio kuuluu johonkin saaduista sivuluokista. Koska sivuluokat muodostavat ryhmän osituksen, tässä ovat kaikki sivuluokat. Pätee, että $Q_8/N = \{\{-1, 1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$.

Tapa 2:
Sovelletaan Lagrangen lausetta ja lasketaan aliryhmän N indeksi eli sivuluokkien määrä.

$$[Q_8 : H] = \frac{|Q_8|}{|N|} = \frac{8}{2} = 4$$

Kuten, yllä saamme neljä eri joukkoa laskemalla auki sivuluokat $1N$, iN, jN, kN. Näiden joukko muodostaa nyt sivuluokkien joukon. Siis $Q_8/N = \{\{-1, 1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$

14. Ryhmällä S_6 on aliryhmä

$$H = \{(1), (13), (16), (36), (136), (163)\}.$$

Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Ratkaise tehtävä määrittämättä sivuluokkien alkioita.

$$(135)(426)H \qquad (15)(2634)H \qquad (12)H$$

Ratkaisuehdotus: Lemman 10.5 nojalla tiedetään, että alkioille $a, b \in S_6$ pätee $aH = bH$ jos ja vain jos $a^{-1}b \in H$. Alkion $(135)(426)$ käänteisalkio on $(153)(246)$. Nyt

$$((135)(426))^{-1}(15)(2634) = (153)(246)(15)(2634) = (136) \in H.$$

[1]Kvaterniot läysi William Rowan Hamilton vuonna 1843.

Näin ollen $(135)(426)H = (15)(2634)H$. Toisaalta

$$(12)^{-1}(135)(426) = (12)(135)(426) = (135264) \notin H,$$

joten $(12)H \neq (135)(426)H$ ja siksi myös $(12)H \neq (15)(2634)H$.

Tehtäväsarja VI

15. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{16}$ aliryhmä $\langle [12]_{16} \rangle$.

    Ratkaisuehdotus: Tutkitaan alkion $[12]_{16}$ monikertoja.

$$\begin{aligned}
1 \cdot [12]_{16} &= [12]_{16} \\
2 \cdot [12]_{16} &= [12]_{16} + [12]_{16} = [24]_{16} = [8]_{16} \\
3 \cdot [12]_{16} &= [36]_{16} = [4]_{16} \\
4 \cdot [12]_{16} &= [48]_{16} = [0]_{16}
\end{aligned}$$

    Pienin kokonaisluku n, jolle pätee $n \cdot [12]_{16} = [0]_{16}$ on 4. Lemman 6.7 mukaan $\langle [12]_{16} \rangle = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$

16. Tutkitaan edellisessä tehtävässä esiintynyttä ryhmän $\mathbb{Z}_{16}$ aliryhmää H. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat. Piirrä vielä lopuksi havainnekuva, jossa näkyvät kaikki joukon $\mathbb{Z}_{16}/H$ alkiot.

    Ratkaisuehdotus: Lagrangen lauseen avulla voidaan määrittää äärellisen ryhmän aliryhmien indeksit, eli niiden sivuluokkien lukumäärät. Tässä tapauksessa $|Z_{16}| = 16$ ja $|H| = 4$, joten Lagrangen lauseen mukaan pätee

$$[G : H] = \frac{16}{4} = 4.$$

    Toisin sanoen aliryhmällä H on 4 sivuluokkaa.

    Laskemalla saadaan, että

$$\begin{aligned}
[0]_{16} + H &= H, \\
[1]_{16} + H &= \{[1]_{16}, [5]_{16}, [9]_{16}, [13]_{16}\}, \\
[2]_{16} + H &= \{[2]_{16}, [6]_{16}, [10]_{16}, [14]_{16}\}, \\
[3]_{16} + H &= \{[3]_{16}, [7]_{16}, [11]_{16}, [15]_{16}\}.
\end{aligned}$$

    Löydettiin neljä eri sivuluokkaa, eli yllä olevan nojalla tässä ovat kaikki sivuluokat.

17.* Voiko kvaternioryhmällä Q_8 olla aliryhmää, jossa on täsmälleen viisi alkiota? (Kvaternioryhmän määritelmä löytyy tehtävästä 13.)

    Ratkaisuehdotus: Lagrangen lauseessa sanotaan, että aliryhmän kertaluku jakaa alkuperäisen ryhmän kertaluvun. Kuitenkin viisi ei jaa kahdeksaa. Kvaternioryhmällä ei siis voi olla viisialkioista aliryhmää.

Ylimääräinen tehtävä

18. Ryhmällä S_4 on aito aliryhmä H, jossa on ainakin 10 alkiota. Mikä on H:n kertaluku?

    Ratkaisuehdotus: Lauseen 4.4 mukaan ryhmän S_4 kertaluku on $4! = 24$. Lagrangen lauseen perusteella aliryhmän H kertaluku jakaa ryhmän S_4 kertaluvun eli $|H|$ on luvun 24 tekijä. Luvun 24 tekijät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24. Koska H on aito aliryhmä, välttämättä pätee $|H| = 12$.