Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 24.2.2017 klo 18.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 10.3.2017 klo 18.30

Tehtäväsarja I

Tutustu kirjan lukuun 9 (toinen painos: luku 8), jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

1. Oletetaan, että G on ryhmä, jonka neutraalialkio on e. Oletetaan lisäksi, että alkiolle $g \in G$ pätee $g^5 = e$. Lauseen 6.2 mukaan $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, mutta toisaalta tiedetään, että $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, g^4\}$. Miten selität tämän? Minne katoavat potenssit $g^5, g^6, g^7 \ldots$ ja $g^{-1}, g^{-2}, \ldots$? Voit havainnollistaa selitystäsi kuvan avulla.

2. Osoita, että matriisiryhmä
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$
on syklinen. (Laskutoimituksena on matriisien kertolasku.)

Seuraavissa tehtävissä voi olla myös apua Lemmasta 8.11: Oletetaan, että G on ryhmä ja $g \in G$. Jos $g^m = e$, alkion g kertaluku jakaa luvun m. (Tätä ei taida olla toisessa painoksessa)

3. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on n alkiota. Olkoon $g \in G$. Osoita että $g^n = e$.

4. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on 29 alkiota. Olkoon $g \in G$, $g \neq e$. Osoita että $g^{19} \neq e$.

5. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, josta tiedetään, että se on syklinen ja että siinä on 33 alkiota. Olkoon $g \in G$, $g \neq e$. Osoita että $g^4 \neq e$, mutta että ryhmässä on alkio h, jolle pätee $h^3 = e$.

Tehtäväsarja II

6.* Oletetaan, että G on ryhmä ja $g \in G$. Oletetaan lisäksi, että $o(g) = 4$. Selvitä lauseen 8.9 avulla alkioiden g^2 ja g^3 kertaluvut. (Kurssikirjan 2. painoksessa lauseen numero on 6.9.)

7. Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä ja $f\colon G \to H$ on ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos H on syklinen, niin myös G on syklinen.

Tehtäväsarja III

Ryhmällä $\mathbb{Z}_8$ on aliryhmä $H = \{[0]_8, [4]_8\}$. Määritellään joukon $\mathbb{Z}_8$ relaatio $\sim$ seuraavasti:
$$[a]_8 \sim [b]_8, \quad \text{jos} \quad -[a]_8 + [b]_8 \in H.$$
Kyseessä on ekvivalenssirelaatio samaan tapaan kuin harjoituksen 5 tehtävässä 16.

8. Mitä alkioita on jäännösluokan $[1]_8$ ekvivalenssiluokassa?

9. Määritä kaikkien ekvivalenssiluokkien alkiot. Montako ekvivalenssiluokkaa on yhteensä?

Tehtäväsarja IV

Ryhdy tutustumaan kurssikirjan lukuun 11 (toinen painos: 10), jossa käsitellään aliryhmän sivuluokkia.

10. Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}_8$ aliryhmää $H = \{[0]_8, [4]_8\}$. Määritä sivuluokan $[2]_8 + H$ alkiot. Vertaa tulosta tehtävään 9. Mitä huomaat?

11. Tutkitaan ryhmän S_3 aliryhmää $B = \{(1), (23)\}$. Määritä sivuluokan $(12)B$ alkiot. Päteekö $(12)B = (123)B$?

12. Ryhmällä $\mathbb{Q}$ on aliryhmä $\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokan $\frac{7}{2} + \mathbb{Z}$ alkiot.

Tehtäväsarja V

13.* Kvaternioryhmän[1] $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ kertotaulu on

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Ryhmällä Q_8 on aliryhmä $Z = \{1, -1\}$. Määritä aliryhmän Z vasempien sivuluokkien joukko Q_8/Z. Muista perustella vastauksesi.

14. Ryhmällä S_6 on aliryhmä

$$H = \{(1), (13), (16), (36), (136), (163)\}.$$

Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Ratkaise tehtävä määrittämättä sivuluokkien alkioita.

$$(135)(426)H \qquad (15)(2634)H \qquad (12)H$$

Tehtäväsarja VI

15. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{16}$ aliryhmä $\langle [12]_{16} \rangle$.

Tutustu sitten Lagrangen lausetta käsittelevät lukuun 10.3.

16. Tutkitaan edellisessä tehtävässä esiintynyttä ryhmän $\mathbb{Z}_{16}$ aliryhmää H. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat. Piirrä vielä lopuksi havainnekuva, jossa näkyvät kaikki joukon $\mathbb{Z}_{16}/H$ alkiot.

17.* Voiko kvaternioryhmällä Q_8 olla aliryhmää, jossa on täsmälleen viisi alkiota? (Kvaternioryhmän määritelmä löytyy tehtävästä 13.)

Ylimääräinen tehtävä

18. Ryhmällä S_4 on aito aliryhmä H, jossa on ainakin 10 alkiota. Mikä on H:n kertaluku?

[1] Kvaterniot löysi William Rowan Hamilton vuonna 1843.