Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 17.2.2017 klo 18.30 (?)
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 3.3.2017 klo 18.30 (?)

Tehtäväsarja I

1. (Rikkinäinen matkamittari.) Kuten aiempien harjoitusten tehtävässä tarkastellaan matkamittaria, jossa on neljä kiekkoa. Tällä kertaa matkamittari on rikki ja vaikka joku kiekko siirtyisikin yhdeksästä nollaan, se ei vaikuta seuraavaan kiekkoon mitenkään.

Tätä matkamittaria voi mallintaa seuraavasti. Olkoon M kaikkien nelikkojen (a, b, c, d) joukko, missä a, b, c ja d ovat joukon $\mathbb{Z}_{10}$ alkioita. Laskutoimitus määritellään nyt koordinaateittain, eli

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 +_{10} a_2, b_1 +_{10} b_2, c_1 +_{10} c_2, d_1 +_{10} d_2),$$

missä $+_{10}$ on ryhmän $\mathbb{Z}_{10}$ tavallinen laskutoimitus (plus-lasku jäännösluokilla). Osoita että $(M, \oplus)$ on vaihdannainen ryhmä.

2. (Virheellinen allekkainlasku.) Ylermi on 10 v. ja opiskelee koulussa allekkainlaskua. Hän unohtaa aina kirjoittaa luvut muistiin. Esimerkiksi hän laskee $671 + 297$ allekkain näin:

$$\begin{array}{rl} & 671 \\ + & 297 \\ \hline & 868 \end{array}$$

Laskiessaan 7+9 hän merkitsi 6 viivan alle, mutta unohti kirjoittaa luvun 1 muistiin, joten sai vastaukseksi 868 oikean 968 sijaan. Osoita että näin määritelty laskutoimitus määrittelee kuitenkin luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ vaihdannaisen ryhmän.

Osoita, että $H = \{0, \dots, 9999\} \subset \mathbb{N}$ on aliryhmä, joka on isomorfinen edellisen tehtävän ryhmän kanssa. Sanallinen selitys riittää.

3. Kuten tehtävässä 1, mutta tällä kertaa binäärinen matkamittari: B on kaikkien nelikkojen (a, b, c, d) joukko, missä a, b, c ja d ovat joukon $\mathbb{Z}_2$ alkioita. Laskutoimitus koordinaateittain:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 +_2 a_2, b_1 +_2 b_2, c_1 +_2 c_2, d_1 +_2 d_2),$$

missä $+_2$ on ryhmän $\mathbb{Z}_2$ tavallinen laskutoimitus (plus-lasku jäännösluokilla). Kuten tehtävässä 1, $(B, \oplus)$ on ryhmä. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $\mathcal{P}(X)$ sen potenssijoukko ja määritellään siinä laskutoimitukseksi symmertinen erotus $\triangle$ (Harjoitus 1, Tehtävä 16). Osoita että ryhmät $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ ja $(B, \oplus)$ ovat isomorfisia.

Tehtäväsarja II

Tutustu kirjan lukuun 8.1 (toisessa painoksessa 6.1), jossa käsitellään aliryhmän virittämistä.

4. Määritä ryhmän $\mathbb{Q}^* = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä $\langle 17 \rangle$.

5. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmät $\langle 10 \rangle$, $\langle -11 \rangle$ ja $\langle 0 \rangle$.

6. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{12}$ aliryhmät $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$ ja $\langle 11 \rangle$.

7. Olkoon $(B, \oplus)$ kuten tehtävässä 3. Määritä aliryhmät $\langle([0]_2, [1]_2, [0]_2, [0]_2)\rangle$ ja $\langle([0]_2, [1]_2, [0]_2, [1]_2)\rangle$.

Tehtäväsarja III

8.* Tuloryhmällä $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ on aliryhmä $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, +)$ kanssa.

9. Tarkastellaan tason yksikköparaabelin kuvaajaa

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2\}.$$

Keksitkö joukkoon P laskutoimituksen $*$ siten että $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(P, *)$ kanssa?

Tehtäväsarja IV

10. Tutkitaan matriisiryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ (kaikkien kääntyvien 2×2 matriisien muodostama ryhmä matriisikertolaskun suhteen) alkiota $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Määritä aliryhmä $\langle A \rangle$. Mikä aliryhmän alkioista on A^5? Entä A^{-2}?

Tehtäväsarja V

Tutustuu kappaleeseen 8.2

11. Määritä seuraavien ryhmän S_6 alkioiden kertaluvut:

$$(14), \quad (253), \quad (14)(253).$$

12. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa?

    Vihje: Edellisen tehtävän havainnoista on hyötyä.

13. Täydessä korttipakassa on 52 korttia joten sen kaikki mahdolliset permutaatiot (järjestykset/sekoitukset) voidaan mallintaa ryhmällä S_{52}. Merkitään luvun x jakojäännöstä luvulla y jaettaessa $x\%y$. Esimerkiksi $2\%3 = 2$ ja $4\%3 = 1$. Korttipakan nosto on permutaatio muotoa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 52 \\ (1+k)\%52 & (2+k)\%52 & \cdots & (52+k)\%52 \end{pmatrix},$$

    missä k on joku luku joukossa $\{0, \ldots, 51\}$. Merkitään tätä permutaatiota σ_k. Osoita, että $\sigma_1^2 = \sigma_2$. Osoita edelleen että $\sigma_k\sigma_1 = \sigma_{k+1}$, kun $k < 51$. Huomataan että σ_1 on sykli $(1, 2, 3, 4, \ldots, 52)$. Joten kaikkien nostojen joukko on itse asiassa tämän syklin virittämä aliryhmä: $\langle(1, 2, 3, 4, \ldots, 52)\rangle$.

    Selitä miten tästä seuraa se, että jos pakan nostaa monta kertaa peräkkäin, sen saa alkuperäiseen järjestykseen nostamalla se vain kerran (oikeasta paikasta); eli yksi nosto riittää kumoamaan monta nostoa.

Tehtäväsarja VI

Tutustu kirjan lukuun 8, jossa käsitellään syklisiä ryhmiä.

14. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Onko olemassa alkiota, joka virittää aliryhmän H? Toisin sanoen, onko H syklinen?

15. Onko ryhmän S_5 aliryhmä $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$ syklinen?

Tehtäväsarja VII

Kertaa ekvivalenssirelaation käsite kurssilta Johdatus yliopistomatematiikkaan tai tutustu lukuun 10 (toinen painos: 9), jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

16. Määritellään kokonaislukujen joukossa relaatio $\sim$ ehdolla

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad -a + b \in 7\mathbb{Z}.$$

    Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Mikä tuttu relaatio on itse asiassa kyseessä?

17. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä luvun 11 ekvivalenssiluokka. Missä yhteydessä olet aiemmin törmännyt tähän joukkoon?

Tehtäväsarja VIII

18.* Olkoon $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.

19. Onko jäännösluokkaryhmä $\mathbb{Z}_6$ isomorfinen symmetrisen ryhmän S_3 kanssa?

Ylimääräinen tehtävä

20. Ovatko ryhmät $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ isomorfiset?