Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 4 - Ratkaisuehdotuksia

Tehtäväsarja I

1. Luettele jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_6$ neljä eri aliryhmää. Perustele vastauksesi.

   Ratkaisuehdotus: Aliryhmiä ovat $\{[0]_6\}$, $\{[0]_6, [3]_6\}$, $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ ja $\mathbb{Z}_6$. Muita aliryhmiä ei itse asiassa olekaan. Joukot $\{[0]_6\}$ ja $\mathbb{Z}_6$ ovat triviaaleja aliryhmiä, joten niitä ei erikseen tarvitse osoittaa aliryhmiksi. Osoitetaan, että $\{[0]_6, [3]_6\}$ ja $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ ovat aliryhmiä.

   Tutkitaan ensin joukkoa $A = \{[0]_6, [3]_6\}$. Se on selvästikin joukon $\mathbb{Z}_6$ osajoukko. Kirjoitaan joukon A laskutoimitustaulu:

$+$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$

   Laskutoimitustaulusta nähdään, että joukko A on suljettu jäännösluokkaryhmän yhteenlaskun suhteen. Lisäksi neutraalialkio $[0]_6$ kuuluu joukkoon A. Jokainen joukon A alkio on oma vasta-alkionsa, joten kaikkien A:n alkioiden vasta-alkiot ovat joukossa A. Siten $A < \mathbb{Z}_6$.

   Tarkastellaan vielä joukkoa $B = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$. Se on selvästikin joukon $\mathbb{Z}_6$ osajoukko. Kirjoitaan joukon B laskutoimitustaulu:

$+$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$

   Laskutoimitustaulusta nähdään, että joukko B on suljettu kellotaulusumman suhteen. Lisäksi neutraalialkio $[0]_6$ kuuluu joukkoon B. Alkiot $[2]_6$ ja $[4]_6$ ovat toistensa vasta-alkiota, ja alkio $[0]_6$ on oma vasta-alkionsa. Näin ollen kaikkien B:n alkioiden käänteisalkiot ovat joukossa B. Siten $B < \mathbb{Z}_6$.

2. Aliryhmät ovat aina ryhmiä. Aliryhmän määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi aliryhmän määritelmästä seuraa, että se on ryhmä.

   Ratkaisuehdotus: Oletetaan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä ja $(H, \cdot)$ sen jokin aliryhmä. Koska aliryhmän määritelmän nojalla H on vakaa laskutoimituksensa suhteen, niin $\cdot$ on joukon H laskutoimitus. Määritelmän mukaan H sisältää laskutoimituksen neutraalialkion sekä jokaisen alkionsa käänteisalkion. Koska H:lla ja G:llä on sama laskutoimitus, niin H:n laskutoimituksen liitännäisyys periytyy suoraan G:ltä. Näin ollen aliryhmä on aina myös ryhmä.

3. (a) Oletetaan, että H on ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä, jossa on alkio 5. Keksi viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä H.
   (b) Oletetaan, että K on ryhmän S_6 aliryhmä, jossa on alkio (254). Pystytkö löytämään viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä K? Kuinka monta alkiota löydät?

Ratkaisuehdotus:

(a)
- $0 \in H$, sillä 0 on $\mathbb{Z}$:n neutraalialkio.
- $-5 \in H$, sillä -5 on 5:n vasta-alkio.
- $10 \in H$, sillä $5 + 5 = 10$.
- $20 \in H$, sillä $10 + 10 = 20$.
- $35 \in H$, sillä $5 + 10 + 20 = 35$.

(b)
- $(1) \in K$, sillä (1) on S_6:n neutraalialkio.
- $(245) \in K$, sillä $(254) \cdot (254) = (245)$.
- $(452) \in K$, sillä (452) on alkion (254) käänteisalkio. Huomataan kuitenkin, että $(452) = (245)$, joten kyseessä ei ollut uusi alkio.
- $(542) \in K$, sillä (542) on alkion (245) käänteisalkio.
  Vielä esimerkiksi:
- $(1) \in K$, sillä $(1) = (254)^3$, mutta tässäkään ei saatu uutta alkiota.
  Löydettiin siis kolme muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä K. Muita alkioita ei ole.

4. (a) Keksi jokin ryhmän $\mathbb{Z}$ aito aliryhmä, jossa on alkio 5.
   (b) Keksi jokin ryhmän S_6 aito aliryhmä, jossa on alkio (254).

Ratkaisuehdotus:

(a) Olkoon $H = 5\mathbb{Z} = \{5z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Kyseessä on $\mathbb{Z}$:n aito aliryhmä. Vastaavanlainen osoitus $3\mathbb{Z}$:lle on tehty oppikirjan esimerkissä 3.13.

(b) Aliryhmässä on oltava ainakin alkiot (254), $(254)(254) = (245)$ sekä $(245)(254) = (1)$. Kokeillaan valita $H = \{(1), (245), (254)\} \subset S_6$. Kertotaulusta

$\cdot$	(1)	(245)	(254)
(1)	(1)	(245)	(254)
(245)	(245)	(254)	(1)
(254)	(254)	(1)	(245)

nähdään, että H on laskutoimituksen suhteen suljettu, sisältää ryhmän S_6 neutraalialkion (1) sekä kaikkien alkioidensa käänteisalkiot ((1) on oma käänteisalkionsa ja (245) sekä (254) ovat toistensa käänteisalkioita). Näin ollen H on aliryhmä ja koska esimerkiksi $(13) \notin H$, mutta $(13) \in S_6$, niin H on S_6:n aito aliryhmä.

Tehtäväsarja II

5. (a) Kirjoita jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_3$ yhteenlaskutaulu.
   (b) Ryhmällä S_4 on aliryhmä $H = \{(1), (134), (143)\}$. Kirjoita H:n kertotaulu.

(c) Ryhmät $\mathbb{Z}_3$ ja H ovat isomorfiset. Etsi kertotaulujen avulla vastaavuus näiden kahden ryhmän välille.

Ratkaisuehdotus:

(a)

$+$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

(b)

$\cdot$	(1)	(134)	(143)
(1)	(1)	(134)	(143)
(134)	(134)	(143)	(1)
(143)	(143)	(1)	(134)

(c) Kertotaulut näyttävät samoilta. Ryhmien alkioita on ainoastaan merkitty eri symboleilla. Saadaan vastaavuus:

$$[0]_3 \mapsto (1)$$
$$[1]_3 \mapsto (134)$$
$$[2]_3 \mapsto (143).$$

Mikäli halutaan tehdä edellinen vähän täsmällisemmin, voidaan muodostaa sopiva isomorfismi esimerkiksi seuraavalla tavalla.

Määritellään laskutoimitustauluja apuna käyttäen kuvaus $f : \mathbb{Z}_3 \to H$ seuraavasti:

$$f([0]_3) = (1), f([1]_3) = (134), f([2]_3) = (143),$$

Selvästi f on bijektio. Oletetaan $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Tapauksissa:

- $a = b = [0]_3$
- $a = [1]_3, b = [2]_3$
- $a = [2]_3, b = [1]_3$

Saadaan (käyttämällä laskutoimitustauluja jälleen apuna):

$$f(a + b) = f([0]_3) = (1) = f(a) \cdot f(b)$$

Edelleen, jos:

- $a = [1]_3, b = [0]_3$
- $a = [0]_3, b = [1]_3$
- $a = b = [2]_3$

Saadaan:

$$f(a + b) = f([1]_3) = (134) = f(a) \cdot f(b)$$

Lopulta, jos:

- $a = [2]_3, b = [0]_3$

- $a = [0]_3, b = [2]_3$
- $a = b = [1]_3$

Saadaan:

$$f(a+b) = f([2]_3) = (143) = f(a) \cdot f(b)$$

Näin saatiin todistettua, että f on ryhmien $\mathbb{Z}_3$ ja H välinen isomorfismi, minkä voidaan ajatella olevan kysytty ryhmien välinen vastaavuus.

6. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Laske matriisien $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ tulo. Matriisikertolaskusta voit lukea tarvittaessa kurssikirjan liitteestä.

   Ratkaisuehdotus: Matriisien tulo on

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 & 1 \cdot b + a \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot b + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.* Tarkastellaan kääntyvien 2×2 -matriisien ryhmää, jota merkitään $GL_2(\mathbb{R})$. Laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Tällä ryhmällä on aliryhmä

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Näytä, että kuvaus $f \colon U \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mapsto a$ on ryhmäisomorfismi. (Ryhmän $\mathbb{R}$ laskutoimitus on luonnollisesti yhteenlasku.)

   Ratkaisuehdotus: Injektiivisyys: Oletetaan, että $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in U$ ja $f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right])$. Nyt $a = f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = b$, mistä seuraa, että

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   joten f on injektio.

   Surjektiivisuus: Oletetaan, että $y \in \mathbb{R}$. Nyt $\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in U$ ja $f(\left[\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]) = y$, joten f on myös surjektio.

   Kuvaus f on siis bijektio. Lisäksi tehtävän 6 nojalla

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = a + b = f\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right),$$

   joten f on ryhmäisomorfismi.

Tehtäväsarja III

8. Tutustu kirjan esimerkkiin 3.6 (toisessa painoksessa 3.5) ja osoita että ryhmien $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ tuloryhmä on ryhmä.

   Ratkaisuehdotus:

   Oletetaan siis, että $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ ovat ryhmiä. Olkoon laskutoimitus $\odot$ sellainen, että kaikilla $x, y \in G \times H$, missä $x = (a_1, b_1)$ ja $y = (a_2, b_2)$ joillain $a_1, a_2 \in G$ ja $b_1, b_2 \in H$, pätee

$$x \odot y = (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2).$$

   Laskutoimitus $\odot$ on nyt määritelty, sillä $a_1 * a_2 \in G$ ja $b_1 \circ b_2 \in H$, joten $x \odot y \in G \times H$.

(G1) Oletetaan, että $x, y, z \in G \times H$, $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2)$ ja $z = (a_3, b_3)$ joillain $a_1, a_2, a_3 \in G$ ja $b_1, b_2, b_3 \in H$. Koska G ja H ovat ryhmiä, niin

$$\begin{aligned}(x \odot y) \odot z &= ((a_1, b_1) \odot (a_2, b_2)) \odot (a_3, b_3) \\ &= (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) \odot (a_3, b_3) \\ &= ((a_1 * a_2) * a_3, (b_1 \circ b_2) \circ b_3) \\ &= (a_1 * (a_2 * a_3), b_1 \circ (b_2 \circ b_3)) \\ &= x \odot (a_2 * a_3, b_2 \circ b_3) = x \odot (y \odot z).\end{aligned}$$

Siis $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$, joten laskutoimitus on liitännäinen.

(G2) Olkoon e_G ryhmän $(G, *)$ neutraalialkio ja olkoon e_H ryhmän $(H, \circ)$ neutraalialkio. Merkitään nyt $e = (e_G, e_H)$ ja osoitetaan, että e on laskutoimituksen $\odot$ neutraalialkio. Oletetaan, että $x \in G \times H$, jolloin $x = (a, b)$ joillain $a \in G$ ja $b \in H$. Koska

$$x \odot e = (a, b) \odot (e_G, e_H) = (a * e_G, b \circ e_H) = (a, b)$$

ja

$$e \odot x = (e_G, e_H) \odot (a, b) = (e_G \; asta, e_H \circ b) = (a, b),$$

joten $e = (e_G, e_H)$ on laskutoimituksen neutraalialkio. Lisäksi koska $e_G \in G$ ja $e_H \in H$, niin $e \in G \times H$, eli e kuuluu joukkoon $G \times H$.

(G3) Olkoon $a \in G$ ja $b \in H$. Koska G ja H ovat ryhmiä, niin sekä alkiolla a että alkiolla b on olemassa käänteisalkio $a^{-1} \in G$ ja $b^{-1} \in H$. Oletetaan nyt, että $x = (a, b) \in G \times H$ ja $x^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$. Osoitetaan, että alkio x^{-1} on alkion x käänteisalkio:

$$x \odot x^{-1} = (a, b) \odot (a^{-1}, b^{-1}) = (a * a^{-1}, b \circ b^{-1}) = (e_G, e_H) = e$$

ja

$$x^{-1} \odot x = (a^{-1}, b^{-1}) \odot (a, b) = (a^{-1} * a, b^{-1} \circ b) = (e_G, e_H) = e,$$

joten alkio x^{-1} on alkion x käänteisalkio. Lisäksi koska $a^{-1} \in G$ ja $b^{-1} \in H$, niin $x = (a^{-1}, b^{-1}) \in G \times H$.

Koska ryhmän ehdot täyttyvät, on tuloryhmä $G \times H$ ryhmä.

9.* (Kompleksiluvut 1) Olkoon $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Varustetaan joukko $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ kompleksilukujen kertolaskulla:

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Osoita että $(\mathbb{C}^*, \odot)$ on vaihdannainen ryhmä.

Ratkaisuehdotus: Tarkistetaan aluksi laskutoimitus: Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{C}^*$, jolloin $x = (a, b)$ ja $y = (c, d)$ joillakin $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nyt

$$x \odot y = (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \in \mathbb{C}^*,$$

sillä jos näin ei olisi, niin $x \odot y = (ac - bd, bc + ad) = (0, 0)$, eli

$$\begin{cases} ac - bd &= 0 \\ bc + ad &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac &= bd \\ bc &= -ad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= \frac{bd}{a} \\ bc &= -ad \end{cases}.$$

Sijoittamalla alkion c yhtälöryhmän toiseen yhtälöön saamme

$$-ad = bc = b\frac{bd}{a} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = -1,$$

mikä on ristiriita, sillä sekä $a^2 \geq 0$ että $b^2 \geq 0$. Näin ollen $x \odot y \in \mathbb{C}^*$.

Laskutoimitus $\odot$ on vaihdannainen, sillä jos $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{C}^*$, niin

$$x \odot y = (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (ca - db, cb + da) = (c, d) \odot (a, b) = y \odot x.$$

Osoitetaan vielä, että pari $(\mathbb{C}^*, \odot)$ on ryhmä.

(G1) Oletetaan, että $x = (a, b), y = (c, d)$ ja $z = (e, f), x, y, z\ in\mathbb{C}^*$. Nyt

$$\begin{aligned}
(x \odot y) \odot z &= ((a, b) \odot (c, d)) \odot z \\
&= (ac - bd, bc + ad) \odot (e, f) \\
&= ((ac - bd)e - (bc + ad)f, (bc + ad)e + (ac - bd)f) \\
&= (ace - bde - bcf - adf, bce + ade + acf - bdf) \\
&= (a(ce - df) - b(de + cf), b(ce - df) + a(de + cf)) \\
&= (a, b) \odot (ce - df, de + cf) \\
&= (a, b) \odot ((c, d) \odot (e, f)) = x \odot (y \odot z).
\end{aligned}$$

Siis $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$, joten laskutoimitus $\odot$ on liitännäinen.

(G2) Osoitetaan, että $(1, 0)$ on laskutoimituksen $\odot$ neutraalialkio.
Olkoon $x = (a, b) \in \mathbb{C}^*$. Nyt

$$x \odot (1, 0) = (a, b) \odot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, b \cdot 1 + a \cdot 0) = (a, b).$$

Koska laskutoimitus $\odot$ on vaihdannainen, niin $x \odot (1, 0) = (1, 0) \odot x = x$. Lisäksi $(1, 0) \in \mathbb{C}^*$, eli neutraalialkio on joukossa $\mathbb{C}^*$.

Huomautus. Neutraalialkion voi löytää tutkimalla milloin $(a, b) \odot (e_1, e_2) = (a, b)$ kun $(a, b) \in \mathbb{C}^*$. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ae_1 - be_2 &= a \\ be_1 + ae_2 &= b \end{cases},$$

mistä voi päätellä, että neutraalialkio voisi olla $(1, 0)$.

(G3) Oletetaan, että $x = (a, b) \in \mathbb{C}^*$, ja osoitetaan, että sen käänteisalkio on $x^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$, ja että $x^{-1} \in \mathbb{C}^*$. Nyt siis

$$\begin{aligned}
x \odot x^{-1} &= (a, b) \odot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \\
&= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}, b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - a \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ba - ab}{a^2 + b^2}\right) \\
&= (1, 0).
\end{aligned}$$

Lisäksi laskutoimituksen $\odot$ vaihdannaisuudesta seuraa, että $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = (1,0)$, joten alkio x^{-1} on alkion x käänteisalkio.

Huomautus. Käänteisalkiota voi etsiä siten, että lähtee tutkimaan yhtälöä $x \odot x^{-1} = (a,b) \odot (a^{-1}, b^{-1}) = (aa^{-1} - bb^{-1}, ba^{-1} + ab^{-1}) = (1,0)$, missä $a, b \in \mathbb{C}^*$. Oletetaan lisäksi käänteisalkioiden ratkaisua varten, että $a, b \neq 0$. Saamme yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} aa^{-1} - bb^{-1} &= 1 \\ ba^{-1} + ab^{-1} &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} aa^{-1} - bb^{-1} &= 1 \\ b^{-1} &= -\frac{ba^{-1}}{a} \end{cases},$$

mistä saamme sijoittamalla sekä muokkaamalla

$$\begin{aligned} aa^{-1} = 1 + bb^{-1} = 1 - b \cdot \frac{ba^{-1}}{a} &\Leftrightarrow a^2a^{-1} = a - b^2a^{-1} \\ &\Leftrightarrow a^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Tästä saamme alkioksi $b^{-1} = -\frac{b}{a} \cdot a^{-1} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a^2+b^2} = -\frac{b}{a^2+b^2}$. Käänteisalkiot ovat määritellyt silloin, kun jompi kumpi tai kumpikin alkioista a ja b ovat erisuuria kuin nolla.

10. Kompleksilukua (a,b) voi merkitä myös $a + bi$ ja jos esim. $a = 0$ ja $b = 1$, niin vielä lyhyemmin $(0,1) = 0 + 1i = i$ jne. Olkoon $Z = \{1, i, -1, -i\}$ neljän kompleksiluvun joukko ja määritellään siinä kompleksilukujen kertolasku kuten äskeisessä tehtävässä. Osoita että $(Z, \odot)$ on ryhmän $(\mathbb{C}^*, \odot)$ aliryhmä ja että se on isomorfinen ryhmän $(K_4, \oplus)$ kanssa.

Ratkaisuehdotus:

Todistetaan ensin että $(Z, \odot)$ on aliryhmä. Se on vakaa laskutoimituksen suhteen, koska Z on täsmälleen kaikkien yhtälön $x^4 = 1$ ratkaisujen joukko. Jos x_0 ja x_1 ovat molemmat ratkaisuja, eli $x_0^4 = x_1^4 = 1$, niin niiden tulokin on ratkaisu: $(x_0 \odot x_1)^4 = x_0^4 \odot x_1^4 = 1 \odot 1 = 1$. Toinen tapa tarkistaa tämä on yksinkertaisesti käydä läpi kaikki mahdolliset joukon Z alkioiden tulot (16 kappaletta) ja todeta että ne kuuluvat joukkoon Z. Ryhmän $(\mathbb{C}^*, \odot)$ neutraalialkio 1 on Z:ssa ja jokaisella alkiolla on käänteisalkio: $i \odot (-i) = (-i) \odot i = 1$, $(-1) \odot (-1) = 1$.

Osoitetaan että $(Z, \odot)$ on isomorfinen kellotauluryhmän kanssa. Eräs tapa osoittaa tämä on palauttaa mieleen, että neljän kokoisia ryhmiä on vain kaksi isomorfiaa vaille: toinen on kellotauluryhmä ja toinen on $G_\triangle = (\mathcal{P}(\{1,2\}), \triangle)$, kahden alkion potenssijoukko varustettuna symmetrisellä erotuksella. Jälkimmäisen kanssa $(Z, \odot)$ ei voi olla isomorfinen, koska $G_\triangle$:ssä kaikki alkiot ovat itsensä käänteisalkioita, mutta $i \odot i = -1 \neq 1$.

Isomorfismin voi myös löytää eksplisiittisesti. Olkoon $f \colon Z \to \{1,2,3,4\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(1) = 4, f(i) = 1, f(-1) = 2, f(-i) = 3.$$

Tämä on selvästi bijektio ja säilyttää laskutoimituksen, mikä nähdään vertaamalla laskutoimitustauluja:

$\odot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	1

🕒	4	1	2	3
4	4	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2

11. (Yksikköympyrä) Olkoon $S = [0, 2\pi[$ ja määritellään laskutoimitus kaavalla

$$\theta_1 \oplus \theta_2 = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2, & \text{jos } \theta_1 + \theta_2 < 2\pi, \\ \theta_1 + \theta_2 - 2\pi, & \text{muuten.} \end{cases}$$

osoita että $(S, \oplus)$ on ryhmä.

Ratkaisuehdotus: Laskutoimitus $\oplus$ on. Osoitetaan, että pari $(S, \oplus)$ on ryhmä.

(G1) Oletetaan, että $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in S$. Käsitellään laskutoimituksen $\oplus$ liitännäisyys neljässä eri tapauksessa:

- Oletetaan, että $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 2\pi$. Tällöin

$$\begin{aligned} (\theta_1 \oplus \theta_2) \oplus \theta_3 &= (\theta_1 + \theta_2) \oplus \theta_3 \\ &= (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 \\ &= \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3) \\ &= \theta_1 \oplus (\theta_2 + \theta_3) = \theta_1 \oplus (\theta_2 \oplus \theta_3). \end{aligned}$$

- Oletetaan, että $\theta_1 + \theta_2 > 2\pi$ ja $\theta_2 + \theta_3 > 2\pi$. Tällöin

$$\begin{aligned} (\theta_1 \oplus \theta_2) \oplus \theta_3 &= (\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) \oplus \theta_3 \\ &= (\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) + \theta_3 - 2\pi \\ &= \theta_1 - 2\pi + (\theta_2 + \theta_3 - 2\pi) \\ &= \theta_1 \oplus (\theta_2 + \theta_3 - 2\pi) = \theta_1 \oplus (\theta_2 \oplus \theta_3). \end{aligned}$$

- Oletetaan, että $\theta_1 + \theta_2 > 2\pi$ ja $\theta_2 + \theta_3 < 2\pi$. Tällöin

$$\begin{aligned} (\theta_1 \oplus \theta_2) \oplus \theta_3 &= (\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) \oplus \theta_3 \\ &= (\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) + \theta_3 \\ &= \theta_1 - 2\pi + (\theta_2 + \theta_3) \\ &= \theta_1 \oplus (\theta_2 + \theta_3) = \theta_1 \oplus (\theta_2 \oplus \theta_3). \end{aligned}$$

- Oletetaan, että $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$ ja $\theta_2 + \theta_3 > 2\pi$. Tällöin

$$\begin{aligned}(\theta_1 \oplus \theta_2) \oplus \theta_3 &= (\theta_1 + \theta_2) \oplus \theta_3 \\ &= (\theta_1 + \theta_2) + \theta_3 - 2\pi \\ &= \theta_1 + (\theta_2 + \theta_3 - 2\pi) \\ &= \theta_1 \oplus (\theta_2 + \theta_3 - 2\pi) = \theta_1 \oplus (\theta_2 \oplus \theta_3).\end{aligned}$$

Siis laskutoimitus $\oplus$ on liitännäinen.

(G2) Osoitetaan, että laskutoimituksen $\oplus$ neutraalialkio on 0 ja että se kuuluu joukkoon S. Jälkimmäinen on selvä ($0 \in S = [0, 2\pi[$), joten riittää osoittaa, että 0 toteuttaa neutraalialkion ehdon. Oletetaan siis, että $\theta \in S$. Tällöin

$$\theta \oplus 0 = \theta + 0 = \theta$$

ja

$$0 \oplus \theta = 0 + \theta = \theta,$$

joten 0 on laskutoimituksen $\oplus$ neutraalialkio.

(G3) Intuitiivisesti ajateltuna alkion $\theta \in S$ käänteisalkio olisi $-\theta$. Nyt kuitenkin $-\theta \notin S$, joten se ei kelpaa. Osoitetaan, että alkion θ käänteisalkio on $\theta^{-1} = 2\pi - \theta$. Nyt $2\pi - \theta \in S$ eli $2\pi - \theta < 2\pi$, joten

$$\theta \oplus \theta^{-1} = \theta \oplus (2\pi - \theta) = \theta + 2\pi - \theta - 2\pi = 0$$

ja

$$\theta^{-1} \oplus \theta = (2\pi - \theta) \oplus \theta = 2\pi - \theta + \theta - 2\pi = 0,$$

joten alkio $2\pi - \theta$ on alkion θ käänteisalkio.

Täten on siis osoitettu, että pari $(S, \oplus)$ on ryhmä.

12. Olkoon $(S, \oplus)$ kuten yllä. Aiemmasta tiedetään että $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ on ryhmä, missä $\cdot$ on reaalilukujen kertolasku ja $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Olkoon $X = \mathbb{R}_+ \times S$ ja määritellään tähän joukkoon laskutoimitus kaavalla

$$(r_1, \theta_1) \otimes (r_2, \theta_2) = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 \oplus \theta_2).$$

Osoita että $(X, \otimes)$ on ryhmä.

Vihje: Tehtävä 8.

Ratkaisuehdotus: Käytetään hyväksi tehtävän 8 todistusta, jossa kahden ryhmän tuloryhmä on ryhmä. Osoitimme tehtävässä 11, että pari $(S, \oplus)$ on ryhmä ja tiedämme, että myös pari $(\mathbb{R}_+)$ on ryhmä. Lisäksi laskutoimitus $\otimes$ on määritelty komponenteittain ja joukko X on joukkojen $\mathbb{R}_+$ ja S karteesinen tulo. Näin ollen tehtävän 8 nojalla myös pari $(X, \otimes)$ on ryhmä.

13. (Kompleksiluvut 2) Olkoon $(X, \otimes)$ äskeisen tehtävän ryhmä ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ tehtävän 9 ryhmä. Olkoon $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ funktio joka on määritelty kaavalla

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Osoita, että se on ryhmäisomorfismi. Apua löytyy kirjan liitteestä C.

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että funktio $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ on ryhmäisomorfismi, eli osoitetaan, että funktio f on bijektio ja että kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$f(x \otimes y) = f(x)f(y).$$

(Im1) Oletetaan, että $x, y \in X$ ovat sellaisia, että $x = (r_1, \theta_1)$ ja $y = (r_2, \theta_2)$ joillakin $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ ja $\theta_1, \theta_2 \in S$. Osoitetaan ensin, että funktio f on injektiivinen. Oletetaan siis, että $f(x) = f(y)$, eli

$$f(x) = f(r_1, \theta_1) = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1) = (r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2) = f(r_2, \theta_2) = f(y).$$

Saamme tästä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r_1 \cos\theta_1 & = r_2 \cos\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & = r_2 \sin\theta_2 \end{cases},$$

jonka ensimmäisestä yhtälöstä voimme ratkaista $r_1 = r_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$. Sijoittamalla tämän yhtälöryhmän toiseen yhtälöön saamme yhtälön

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_1 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = r_2 \sin\theta_2,$$

jota muokkaamalla saamme

$$\begin{aligned} r_2 \sin\theta_1 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = r_2 \sin\theta_2 \ &\Leftrightarrow\ \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \sin\theta_2 \\ &\Leftrightarrow\ \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} \\ &\Leftrightarrow\ \tan\theta_1 = \tan\theta_2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ kun $n \in \mathbb{N}$. Koska kuitenkin $\theta_1, \theta_2 \in S$, niin on pädettävä, että $\theta_1 = \theta_2$. Sijoittamalla saadun alkion θ_2 yhtälöön $r_1 = r_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ saamme

$$r_1 = r_2 \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = r_2 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_1} = r_2.$$

Nyt siis $\theta_1 = \theta_2$ ja $r_1 = r_2$, joten $x = (r_1, \theta_1) = (r_2, \theta_2) = y$, joten funktio f on injektio.

Osoitetaan, että funktio f on surjektio. Oletetaan, että $x \in \mathbb{C}^*$, jolloin $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ joillain $r \in \mathbb{R}_+, \theta \in S$. Nyt $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = x$. Näin ollen funktio f on surjektio.

(Im2) Osoitetaan vielä isomorfismin toinen ehto. Oletetaan, että $x, y \in X$, jolloin $x = (r_1, \theta_1)$ ja $y = (r_2, \theta_2)$ joillakin $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ ja $\theta_1, \theta_2 \in S$. Oletetaan lisäksi, että

$\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$. Tällöin

$$\begin{aligned}
f(x \otimes y) &= f((r_1, \theta_1) \otimes (r_2, \theta_2)) \\
&= f(r_1 r_2, \theta_1 \oplus \theta_2) \\
&= f(r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) \\
&= (r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\
&= (r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2), r_1 r_2 (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)) \\
&= (r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2, r_1 r_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + r_1 r_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2) \\
&= (r_1 \cos\theta_1 r_2 \cos\theta_2 - r_1 \sin\theta_1 r_2 \sin\theta_2, r_1 \sin\theta_1 r_2 \cos\theta_2 + r_1 \cos\theta_1 r_2 \sin\theta_2) \\
&\overset{(1)}{=} (r_1 \cos\theta_1 r_2 \cos\theta_2 - r_1 \sin\theta_1 r_2 \sin\theta_2, r_1 \sin\theta_1 r_2 \cos\theta_2 + r_1 \cos\theta_1 r_2 \sin\theta_2) \\
&= (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1) \cdot (r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2) \\
&= f(r_1, \theta_1) f(r_2 \theta_2) = f(x) f(y).
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus (1) seuraa joukon $\mathbb{C}^*$ laskutoimituksesta.
Yllä oleva päättely pätee myös, jos $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$, sillä $\cos(\theta_1 - 2\pi) = \cos\theta_1$ ja $\sin(\theta_1 - 2\pi) = \sin\theta_1$ kosini- ja sinifunktioiden jaksollisuuden takia, jolloin

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) &= \cos(\theta_1 + (\theta_2 - 2\pi)) \\
&= \cos\theta_1 \cos(\theta_2 - 2\pi) - \sin\theta_1 \sin(\theta_2 - 2\pi) \\
&= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) &= \sin(\theta_1 + (\theta_2 - 2\pi)) \\
&= \sin\theta_1 \cos(\theta_2 - 2\pi) + \cos\theta_1 \sin(\theta_2 - 2\pi) \\
&= \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2.
\end{aligned}$$

Koska isomorfisuuden ehdot täyttyvät, on funktio f ryhmäisomorfismi.

14. (Yksikköympyrä ja kompleksiluvut.) Olkoon S kuten tehtävässä 11. Olkoon

$$Y = \{1\} \times S = \{(1, \theta) \mid \theta \in S\} \subset X,$$

missä X on kuten yllä. Osoita että Y on ryhmän $(X, \otimes)$ aliryhmä. Selitä omin sanoin miksi näistä kaikista tehtävistä seuraa että yksikköympyrä (ne kompleksiluvut, joiden itseisarvo on 1) on kompleksilukujen (multiplikatiivinen) aliryhmä.

Vihje: Y vastaa äskeisen tehtävän isomorfiassa niitä kompleksilukuja, joilla on esitys $\cos\theta + i \sin\theta$.

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että pari $(Y, \otimes)$ on ryhmän $(X, \otimes)$ aliryhmä.

(H1) Oletetaan, että $x, y \in Y$, eli että $x = (1, \theta_1)$ ja $y = (1, \theta_2)$ joillain $\theta_1, \theta_2 \in S$. Nyt

$$\begin{aligned}
x \otimes y &= (1, \theta_1) \otimes (1, \theta_2) = (1 \cdot 1, \theta_1 \oplus \theta_2) \\
&= \begin{cases} (1, \theta_1 + \theta_2) & \text{jos } \theta_1 + \theta_2 < 2\pi \\ (1, \theta_1 + \theta_2 - 2\pi) & \text{muutoin} \end{cases},
\end{aligned}$$

eli $x \otimes y \in Y$. Näin ollen joukko Y on vakaa laskutoimituksen $\otimes$ suhteen.

(H2) Ryhmän $(X, \otimes)$ neutraalialkio on $(1,0)$. Selvästi

$$(1,0) \in \{1\} \times S = \{1\} \times [0, 2\pi[= Y,$$

eli neutraalialkio $(1,0)$ kuuluu joukkoon Y.

(H3) Oletetaan, että $x \in Y$, jolloin $x = (1,\theta)$ jollain $\theta \in S$. Tällöin myös $2\pi - \theta \in S$, joten alkion x käänteisalkio $x^{-1} = (1, 2\pi - \theta) \in Y$.

Näin ollen joukko Y on ryhmän X aliryhmä.

Tehtäväsarja IV

15. Laske ryhmässä S_5 tulo $\sigma\tau$, kun

   (a) $\sigma = (125)(34)$ ja $\tau = (25)(34)$
   (b) $\sigma = (132)$ ja $\tau = (15)$.

   Anna vastaus syklimuodossa.

   Ratkaisuehdotus: $(125)(34) \cdot (25)(34) = (12)$, $(132) \cdot (15) = (1532)$

16.* Tarkastellaan ryhmää S_6.

   (a) Määritä sen neutraalialkio.
   (b) Määritä permutaatioiden $(13)(254)$ ja (34) käänteisalkiot. Lopulliseen ratkaisuun ei tarvitse kirjata kertolaskujen kaikkia välivaiheita.

   Ratkaisuehdotus:

   (a) Ryhmän S_6 neutraalialkio on (1).
   (b) Koska $(13)(254) \cdot (452)(31) = (1) = (452)(31) \cdot (13)(254)$, niin alkion $(13)(254)$ käänteisalkio on $(452)(31) = (13)(245)$. Vastaavasti koska $(34)(43) = (1) = (43)(34)$, niin alkion (34) käänteisalkio on $(43) = (34)$.

17. Ryhmän S_n permutaatio σ on *parillinen*, jos joukossa

$$\{(x,y) \in \{1,\dots,n\}^2 \mid x < y \text{ ja } \sigma(x) > \sigma(y)\}$$

   on parillisen monta alkiota. Luettele ryhmän S_3 parilliset alkiot ja osoita, että ne muodostavat aliryhmän. (Lisätietoa liitteessä D).

   Ratkaisuehdotus: Ryhmä S_3 koostuu alkioista $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Merkitään tutkittavaa joukkoa

$$A_\sigma = \{(x,y) \in \{1,\dots,n\}^2 \mid x < y \text{ ja } \sigma(x) > \sigma(y)\}.$$

   Tutkittavat alkioparit ovat

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & (2,1) & (3,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3). \end{array}$$

Näistä pareista kaikki, joissa jälkimmäinen komponentti on pienempi tai yhtä suuri kuin ensimmäinen komponentti, jätämme tutkimatta, sillä ne eivät täytä joukon A_σ ensimmäistä ehtoa. Tutkitaan joukon A_σ toista ehtoa alkioille $(1,2),(1,3)$ ja $(2,3)$ joukon S_3 permutaatioiden suhteen. Joukon A ehdossa oleva merkintä $\sigma(x)$ tarkoittaa alkion x sijoitusta permutaatiossa σ. Tutkitaan kutakin permutaatiota erikseen parien suhteen.

$(1):$

$$\begin{aligned}
(1,2):&\quad (1)(1)=1 &<&\quad (1)(2)=2\\
(1,3):&\quad (1)(1)=1 &<&\quad (1)(3)=3\\
(2,3):&\quad (1)(2)=2 &<&\quad (1)(3)=3.
\end{aligned}$$

Permutaation (1) muodostamaan joukkoon $A_{(1)}$ ei kuulu yhtään alkiota, sillä mitkään pareista $(1,2),(1,3)$ ja $(2,3)$ eivät toteuttaneet joukon $A_{(1)}$ ehtoa. Näin ollen $A_{(1)}=\{\emptyset\}$, joten joukossa on parillinen määrä alkioita.

$(12):$

$$\begin{aligned}
(1,2):&\quad (12)(1)=2 &>&\quad (12)(2)=1\\
(1,3):&\quad (12)(1)=2 &<&\quad (12)(3)=3\\
(2,3):&\quad (12)(2)=1 &<&\quad (12)(3)=3.
\end{aligned}$$

Permutaation (12) joukko on siis $A_{(12)}=\{(1,2)\}$ eli joukon alkioiden lukumäärä on 1, joten se on pariton.

$(13):$

$$\begin{aligned}
(1,2):&\quad (13)(1)=3 &>&\quad (13)(2)=2\\
(1,3):&\quad (13)(1)=3 &>&\quad (13)(3)=1\\
(2,3):&\quad (13)(2)=2 &>&\quad (13)(3)=1.
\end{aligned}$$

Permutaation (13) joukko on siis $A_{(13)}=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ eli joukon alkioiden lukumäärä on 3, joten se on pariton.

$(23):$

$$\begin{aligned}
(1,2):&\quad (23)(1)=1 &<&\quad (23)(2)=3\\
(1,3):&\quad (23)(1)=1 &<&\quad (23)(3)=2\\
(2,3):&\quad (23)(2)=3 &>&\quad (23)(3)=2.
\end{aligned}$$

Permutaation (23) joukko on siis $A_{(23)}=\{(2,3)\}$ eli joukon alkioiden lukumäärä on 1, joten se on pariton.

$(123):$

$$\begin{aligned}
(1,2):&\quad (123)(1)=2 &<&\quad (123)(2)=3\\
(1,3):&\quad (123)(1)=2 &>&\quad (123)(3)=1\\
(2,3):&\quad (123)(2)=3 &>&\quad (123)(3)=1.
\end{aligned}$$

Permutaation (123) joukko on siis $A_{(123)}=\{(1,2),(2,3)\}$ eli joukon alkioiden lukumäärä on 2, joten se on parillinen.

$(132):$

$$\begin{array}{llcl} (1,2): & (132)(1)=3 & > & (132)(2)=1 \\ (1,3): & (132)(1)=3 & > & (132)(3)=2 \\ (2,3): & (132)(2)=1 & < & (132)(3)=2. \end{array}$$

Permutaation (132) joukko on siis $A_{(132)} = \{(1,2),(1,3)\}$ eli joukon alkioiden lukumäärä on 2, joten se on parillinen.

Näin ollen ryhmän S_3 parilliset alkiot ovat $(1),(123)ja(132)$. Muodostetaan niistä alternoiva joukko $A_3 = \{(1),(123),(132)\}$. Osoitetaan, että alternoiva joukko A_3 on joukon S_3 aliryhmä.

(H1) Laskutoimitus on vakaa, sillä

$$\begin{array}{rr} (1)(132)=(132) & (132)(1)=(132) \\ (1)(123)=(123) & (123)(1)=(123) \\ (132)(132)=(123) & (123)(123)=(132) \\ (123)(132)=(1) & (132)(123)=(1). \end{array}$$

(H2) Joukon S_3 neutraalialkio kuuluu joukkoon A_3, eli $(1) \in A_3$, sillä permutaatio (1) on parillinen.

(H3) Joukon A_3 alkiot sisältävät käänteisalkionsa, kuten voimme kohdasta (H1) nähdä.

Näin ollen joukko A_3 on ryhmän S_3 aliryhmä.

18.* Ratkaise yhtälö $(34)x(13)(254) = (132)$ ryhmässä S_5.

Neuvo: Jos käytät ekvivalenssinuolia, muista perustella niiden käyttö.

Ratkaisuehdotus: Oletetaan, että $x \in S_5$. Viime viikon tehtävän 15 nojalla

$$\begin{array}{lrcl} & (34)x(13)(254) & = & (132) \\ \Rightarrow & (34)x((13)(254))((13)(254))^{-1} & = & (132)((13)(254))^{-1} \\ \Rightarrow & (34)x(1) & = & (132)(13)(245) \\ \Rightarrow & (34)^{-1}(34)x & = & (34)^{-1}(132)(13)(245) \\ \Rightarrow & (1)x & = & (34)(132)(13)(245) \\ \Rightarrow & x & = & (12345). \end{array}$$

Jos siis ratkaisu on olemassa, se on $x = (12345)$. Koska toisaalta

$$(34)(12345)(13)(254) = (132),$$

niin tämä todella on ratkaisu. Siten yhtälön ratkaisu on (12345).

Ylimääräinen tehtävä

19. Selvitä, mikä tetraedri on. Määritä tetraedrin symmetriaryhmän alkiot. (Tietoa symmetriaryhmistä löytyy luvusta 12 (toisessa painoksessa 11).)

Lisähaaste: Selvitä muiden Platonin kappaleiden symmetriaryhmät.

Kartuta matemaattista sivistystäsi

20. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10). Tästä tehtävästä ei jaeta lisäpisteitä. Enemmän “Futurama lauseesta”: `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Prisoner_of_Benda#The_theorem`

    Ratkaisuehdotus: