Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 10.2.2017 klo 18.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 24.2.2017 klo 18.30

Tehtäväsarja I

1. Luettele jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_6$ neljä eri aliryhmää. Perustele vastauksesi.

2. Aliryhmät ovat aina ryhmiä. Aliryhmän määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi aliryhmän määritelmästä seuraa, että se on ryhmä.

3. (a) Oletetaan, että H on ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä, jossa on alkio 5. Keksi viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä H.
   (b) Oletetaan, että K on ryhmän S_6 aliryhmä, jossa on alkio (254). Pystytkö löytämään viisi muuta alkiota, jotka ovat välttämättä aliryhmässä K? Kuinka monta alkiota löydät?

4. (a) Keksi jokin ryhmän $\mathbb{Z}$ aito aliryhmä, jossa on alkio 5.
   (b) Keksi jokin ryhmän S_6 aito aliryhmä, jossa on alkio (254).

Tehtäväsarja II

Tutustu kirjan lukuun 7.3 (toisessa painoksessa: 5.3), jossa käsitellään isomorfismia.

5. (a) Kirjoita jäännösluokkaryhmän $\mathbb{Z}_3$ yhteenlaskutaulu.
   (b) Ryhmällä S_4 on aliryhmä $H = \{(1), (134), (143)\}$. Kirjoita H:n kertotaulu.
   (c) Ryhmät $\mathbb{Z}_3$ ja H ovat isomorfiset. Etsi kertotaulujen avulla vastaavuus näiden kahden ryhmän välille.

6. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Laske matriisien $\left[\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ tulo. Matriisikertolaskusta voit lukea tarvittaessa kurssikirjan liitteestä.

7.* Tarkastellaan kääntyvien 2×2 -matriisien ryhmää, jota merkitään $GL_2(\mathbb{R})$. Laskutoimituksena on matriisien kertolasku. Tällä ryhmällä on aliryhmä

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Näytä, että kuvaus $f\colon U \to \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] \mapsto a$ on ryhmäisomorfismi. (Ryhmän $\mathbb{R}$ laskutoimitus on luonnollisesti yhteenlasku.)

Tehtäväsarja III

8. Tutustu kirjan esimerkkiin 3.6 (toisessa painoksessa 3.5) ja osoita että ryhmien $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ tuloryhmä on ryhmä.

Liitteestä C on apua kompleksilukujen mieleenpalauttamisessa.

9.* (Kompleksiluvut 1) Olkoon $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Varustetaan joukko $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ kompleksilukujen kertolaskulla:
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$
Osoita että $(\mathbb{C}^*, \odot)$ on vaihdannainen ryhmä.

10. Kompleksilukua (a, b) voi merkitä myös $a + bi$ ja jos esim. $a = 0$ ja $b = 1$, niin vielä lyhyemmin $(0, 1) = 0 + 1i = i$ jne. Olkoon $Z = \{1, i, -1, -i\}$ neljän kompleksiluvun joukko ja määritellään siinä kompleksilukujen kertolasku kuten äskeisessä tehtävässä. Osoita että $(Z, \odot)$ on ryhmän $(\mathbb{C}^*, \odot)$ aliryhmä ja että se on isomorfinen ryhmän $(K_4, \clock)$ kanssa.

11. (Yksikköympyrä) Olkoon $S = [0, 2\pi[$ ja määritellään laskutoimitus kaavalla
$$\theta_1 \oplus \theta_2 = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2, & \text{jos } \theta_1 + \theta_2 < 2\pi, \\ \theta_1 + \theta_2 - 2\pi, & \text{muuten.} \end{cases}$$
osoita että $(S, \oplus)$ on ryhmä.

12. Olkoon $(S, \oplus)$ kuten yllä. Aiemmasta tiedetään että $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ on ryhmä, missä $\cdot$ on reaalilukujen kertolasku ja $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Olkoon $X = \mathbb{R}_+ \times S$ ja määritellään tähän joukkoon laskutoimitus kaavalla
$$(r_1, \theta_1) \otimes (r_2, \theta_2) = (r_1 \cdot r_2, \theta_1 \oplus \theta_2).$$
Osoita että $(X, \otimes)$ on ryhmä.

    Vihje: Tehtävä 8.

13. (Kompleksiluvut 2) Olkoon $(X, \otimes)$ äskeisen tehtävän ryhmä ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ tehtävän 9 ryhmä. Olkoon $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ funktio joka on määritelty kaavalla
$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta) = r(\cos\theta + i \sin\theta).$$
Osoita, että se on ryhmäisomorfismi. Apua löytyy kirjan liitteestä C.

14. (Yksikköympyrä ja kompleksiluvut.) Olkoon S kuten tehtävässä 11. Olkoon
$$Y = \{1\} \times S = \{(1, \theta) \mid \theta \in S\} \subset X,$$
missä X on kuten yllä. Osoita että Y on ryhmän $(X, \otimes)$ aliryhmä. Selitä omin sanoin miksi näistä kaikista tehtävistä seuraa että yksikköympyrä (ne kompleksiluvut, joiden itseisarvo on 1) on kompleksilukujen (multiplikatiivinen) aliryhmä.

    Vihje: Y vastaa äskeisen tehtävän isomorfiassa niitä kompleksilukuja, joilla on esitys $\cos\theta + i \sin\theta$.

Tehtäväsarja IV

15. Laske ryhmässä S_5 tulo $\sigma\tau$, kun

    (a) $\sigma = (125)(34)$ ja $\tau = (25)(34)$
    (b) $\sigma = (132)$ ja $\tau = (15)$.

    Anna vastaus syklimuodossa.

16.* Tarkastellaan ryhmäääää S_6.

    (a) Määritä sen neutraalialkio.
    (b) Määritä permutaatioiden (13)(254) ja (34) käänteisalkiot. Lopulliseen ratkaisuun ei tarvitse kirjata kertolaskujen kaikkia välivaiheita.

17. Ryhmän S_n permutaatio σ on *parillinen*, jos joukossa

$$\{(x, y) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid x < y \text{ ja } \sigma(x) > \sigma(y)\}$$

    on parillisen monta alkiota. Luettele ryhmän S_3 parilliset alkiot ja osoita, että ne muodostavat aliryhmän. (Lisätietoa liitteessä D).

18.* Ratkaise yhtälö $(34)x(13)(254) = (132)$ ryhmässä S_5.

    Neuvo: Jos käytät ekvivalenssinuolia, muista perustella niiden käyttö.

Ylimääräinen tehtävä

19. Selvitä, mikä tetraedri on. Määritä tetraedrin symmetriaryhmän alkiot. (Tietoa symmetriaryhmistä löytyy luvusta 12 (toisessa painoksessa 11).)

    Lisähaaste: Selvitä muiden Platonin kappaleiden symmetriaryhmät.

Kartuta matemaattista sivistystäsi

20. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10). Tästä tehtävästä ei jaeta lisäpisteitä. Enemmän "Futurama lauseesta":
    `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Prisoner_of_Benda#The_theorem`