Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 3.2.2017 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 17.2.2017 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Huomautus: Kirjan aliryhmän määritelmä (3.12 kolmas painos) sanoo että jos on annettu ryhmä $(G, \cdot)$ ja osajoukko $H \subset G$, niin pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä mikäli tietyt ehdot toteutuvat. Sillä H varustettiin samalla laskutoimituksella kuin G, on yleinen käytäntö lyhentää sanoma "$(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä" sanomalla pelkästään että "H on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä", sillä H:n laskutoimitus on kontekstista selvä (sama kuin G:llä, tai oikeastaan sen rajoittuma joukkoon H).

1. Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmä?

2.* Onko $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

3. Onko $(K_{12}, ◷)$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?

4.* Olkoon $A = \{0, 1, 2\}$ ja olkoon $\star$ joukossa A määritelty laskutoimitus siten että $(A, \star)$ on ryhmä, jonka neutraalialkio on 0. Mitä on $1 \star 1$?

5. Olkoon $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ yksikköväli. Olkoon

$$X = \{f : [0, 1] \to [0, 1] \mid f \text{ on jatkuva, aidosti kasvava surjektio}\}$$

jossa on määritelty laskutoimitus $\circ$, eli kuvausten yhdistäminen. Osoita, että $(X, \circ)$ on ryhmä.

Tehtäväsarja II

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Piirrä kuvat permutaatioista σ ja τ. Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

7. Laske tulot $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ ja $\sigma \circ \rho$.

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

8. Määritä permutaatioiden σ ja τ radat. Kuvista on apua.

Tehtäväsarja III

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliesityksestä.

9. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliesityksiä. Piirrä permutaatoista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.

   (a) ryhmän S_4 alkio (1324)
   (b) ryhmän S_6 alkio (1324)
   (c) ryhmän S_5 alkio (14)(253)

10. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

   (a) Ryhmän S_6 alkiot (16)(35) ja (35)(16) ovat samat.
   (b) Ryhmän S_4 alkiot (134) ja (143) ovat samat.
   (c) Ryhmän S_6 alkiot (236) ja (362)(4)(5) ovat samat.

11. Määritellään

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Kirjoita permutaatioiden α ja β sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

Tehtäväsarja IV

12. Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n$ voi määritellä yhteenlaskun kaavalla $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$. Osoita, että

   (a) $[3]_5 + [6]_5 = [4]_5$
   (b) $[5]_7 + [3]_7 = [1]_7$.

   Mitä tuttua laskutoimitusta jäännösluokkien yhteenlasku muistuttaa?

13. Päteekö $[-6]_3 + [2]_3 = [4]_3$? Perustele vastauksesi.

14.* Jäännösluokkien joukko $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ on ryhmä jäännösluokkien yhteenlaskun suhteen (Lause 6.11 kolmas painos). Kirjoita ryhmän laskutoimitustaulu ja näytä että se on vaihdannainen.

Tehtäväsarja V

15. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Osoita, että

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

   Voit tarvittaessa kerrata matriisikertolaskua kurssikirjan liitteestä.

(b) Tutkitaan nyt yhtälöä

$$XA = C,$$

missä $X \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Tarkastellaan seuraavaa päättelyketjua:

$$\begin{aligned} & XA = C \\ \Leftrightarrow \quad & XAB = CB \\ \Leftrightarrow \quad & XI = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkista, että $X = [-1\ 1]$ ei ole yhtälön $XA = C$ ratkaisu. Mikä päättelyssä menee pieleen?

(c) Vaihda päättelyketjussa ekvivalenssinuolten tilalle tarpeen mukaan implikaationuolia niin, että päättelyketju on tosi.

16. Oletetaan, että G on ryhmä, jossa on alkiot a ja b. Ratkaise ryhmässä G yhtälö $x^2a^2 = xb$.

    Neuvo: Muista edellisen tehtävän havainnot. Jos käytät yhtälönratkaisussa ekvivalenssinuolia, perustele päättelyn molemmat suunnat. Yhtälöitä on mahdollista ratkaista myös implikaatioiden avulla.

17. Oletetaan, että edellisessä kohdan ryhmä on kellotauluryhmä $(K_7, \oplus)$. Oletetaan lisäksi, että $a = 4$ ja $b = 2$. Mikä tässä tapauksessa on yhtälön ratkaisu?

18.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraavanlainen laskutoimitustaulu:

$+$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	a	e	b	c
b	e	c	b	f	a	d
c	a	b	c	d	e	f
d	b	a	d	c	f	e
e	d	f	e	a	c	b
f	c	e	f	b	d	a

Määritä seuraavat alkiot:

(a) $-d$ **(b)** $3a + 2e$ **(c)** $(-4)f$.

(Huomaa, että tämä on kolmen alkion permutaatioryhmä ja toisaalta tasasivuisen kolmion symmetriaryhmä. Tästä huomautuksesta ei ole tarkoitus olla mitään apua tehtävän ratkaisemiseen).

19. Oletetaan, että $(G, +)$ on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio e. Osoita, että joukko $H = \{a \in G \mid 3a = e\}$ on ryhmän G aliryhmä.

Ylimääräiset tehtävät

20. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Anna esimerkki tilanteesta missä kahden aliryhmän yhdiste ei ole aliryhmä.

21. Anna riittävä ja välttämätön ehto sille milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä.