Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 27.1.2017 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 10.2.2017 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Voiko joukossa $\mathbb{N}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla $a * b = a^2 - 2b + 5$?

2. Merkitään $X = \{0, 1, 2\}$. Olkoon potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ määritelty laskutoimitus $\triangle$ kuten viime viikon tehtävässä: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mitkä ovat alkioiden $\{1\}$ ja $\{0, 1, 2\}$ käänteisalkiot?

3. Miksi rationaalilukujen joukossa on huono määritellä laskutoimitus $\odot$ kaavalla
$$\frac{m}{n} \odot \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n^2 + l^2}.$$
Tässä $m, k \in \mathbb{Z}$ ja $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

4.* Olkoon $*$ joukon S liitännäinen laskutoimitus. Oletetaan, että joukon S alkioilla x ja y on käänteisalkiot. Osoita, että alkiolla $x * y$ on käänteisalkio.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssikirjan lukuun 3, joka käsittelee ryhmiä. Jos käytössä on toinen painos, ryhmän määritelmästä voi yliviivata ehdon (G0). Se seuraa muutenkin laskutoimituksen määritelmästä 2.1

5. Vanhassa autossa on mekaaninen matkamittari jossa on neljä pyörää joista jokaisessa on luvut 0-9:

Kun oikeanpuolimmainen pyörän näkyvä numero muuttuu 9:stä 0:ksi, toiseksi oikeanpuolimmainen pyörähtää yhden numeron verran eteenpäin. Samoin kun toiseksi oikeimmainen siirtyy 9:stä 0:ksi, niin vasemmalta toinen pyörähtää yhden numeron ja kun toinen vasemmalta siirtyy 9:stä 0:ksi niin vasemmanpuoleinen siirtyy yhden eteenpäin. Numero 9999 on viimeinen, jonka jälkeen seuraava on yllä olevan mukaan 0000. Kaikkia mahdollisia numerokombinaatioita on siis 10000. Olkoon S näiden kaikkien numerokombinaatioiden joukko.

(a) Miten määrittelisit laskutoimituksen joukkoon S niin että se vastaisi matkamittariin kuuluvaa intuitiota? (Intuitio: ensin kuljettiin $x$km ja sitten $y$km, paljonko matkamittari näyttää?)

(b) Tuleeko siitä ryhmä?

(c) Mikä muutos pitää tehdä tavalliseen allekkainlaskuun jotta se toimisi tämän laskutoimituksen kanssa sopusoinnussa?

6. Määritellään joukossa $S = \{X, Y, Z\}$ laskutoimitus $\square$ seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$\square$	X	Y	Z
X	X	Z	Y
Y	Y	X	Z
Z	Z	Y	Y

Onko $(S, \square)$ ryhmä?

7. Määritellään reaalilukujen joukossa laskutoimitus $\oplus$ kaavalla $x \oplus y = 3xy$. Osoita, että $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$ on ryhmä.

8. Suljetulla välillä $I = [-2, 2]$ voidaan määritellä laskutoimitus $\boxdot$ kaavalla $a \boxdot b = \max\{a, b\}$. Onko $(I, \boxdot)$ ryhmä?

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssikirjan lukuun 3.6, joka käsittelee aliryhmiä.

9. Osoita, että $A = \{5, 10, 15\}$ on kellotauluryhmän K_{15} aliryhmä. Apuna kannattaa käyttää joukon A laskutoimitustaulua.

10. Oletetaan, että H on kellotauluryhmän K_{20} aliryhmä, jossa on alkio 8. Osoita, että seuraavat alkiot kuuluvat aliryhmään H:

$$20, 16, 12, 4.$$

11. Onko $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ryhmän $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä?

Tehtäväsarja IV

Tutustu kirjan lukuun 6.1 (toinen painos: 7.5) jossa käsitellään kongruenssia.

12. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät?

(a) $8 \equiv 50 \pmod 6$ (b) $13 \equiv 4 \pmod{11}$ (c) $-4 \equiv 11 \pmod 5$

13. Keksi neljä alkiota, jotka ovat joukossa $[5]_7$.

14.* Luettele jäännösluokkien $[6]_{10}$ ja $[26]_{10}$ alkiot. Vaikuttaako siltä, että $[6]_{10} = [26]_{10}$? Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

15. Ovatko jäännösluokat $[-3]_5$ ja $[21]_5$ samat? Miten ongelman voi ratkaista täsmällisesti, jäännösluokkien alkioita määrittämättä?

Tehtäväsarja V

16.* Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Määritä alkiot b^4 ja d^{-2}. (Pelkkä vastaus ei riitä. Muista perustelut.)

17. Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $(xy)^2 = x^2y^2$. kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä G on vaihdannainen.

Ylimääräiset tehtävät

Seuraavilla tehtävillä voit korvata mitkä tahansa tähdettömät tehtävät.

18. Kurssikirjassa on osoitettu, että ryhmän laskutoimitustaulussa kukin alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran (Lause 3.12 (2. painos 3.10)).

    Oletetaan, että äärellisessä epätyhjässä joukossa S on määritelty laskutoimitus $*$. Jos kukin joukon alkio esiintyy laskutoimitustaulun jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran, onko $(S, *)$ välttämättä ryhmä?

19. Olkoon

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ja olkoon I yksikkömatriisi. Ratkaistaan yhtälö $(I - N)X = I$, missä $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\begin{aligned}
& (I - N)X = I \\
\iff & X - NX = I \qquad || \cdot N \\
\iff & NX - N^2X = N \\
\iff & NX + OX = N \\
\iff & NX = N \qquad || \cdot N^{-1} \\
\iff & X = I
\end{aligned}$$

(a) Tarkista, onko ykkösmatriisi I yhtälön ratkaisu.

(b) Mikä päättelyssä menee pieleen?