Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 8

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 30.3.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 29.3. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkona 5.4.

Renkaat ja jaollisuus

80. Tee renkaita ja jaollisuutta koskeva oppimistesti. (Se ilmestyy Moodleen torstain 23.3. aikana.)

Kunnat ja kuntalaajennokset

81. (a) Olkoon L kunnan K laajennos. Oletetaan, että $f \in K[X]$ on jaoton pääpolynomi, jolla on juuri $\alpha \in L$. Osoita, että f on alkion α minimipolynomi.
    (b) Määritä $\min(\mathbb{Q}, \sqrt{2}i)$.

82. Todista lause 8.4 a).

83. Määritä seuraavissa tapauksissa joukon A virittämän laajennoksen L/K alilaajennoksen $K(A)$ aste:
    (a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}i\}$
    (b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}, i\}$
    (c) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2} + i\}$.

84. Selvitä seuraavat laajennosten asteet:
    (a) $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5}) : \mathbb{Q}]$
    (b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$
    (c) $[\mathbb{Q}(i, e^{\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$
    (d) $[\mathbb{F}_2([X^2]) : \mathbb{F}_2]$, missä $\mathbb{F}_2([X^2]) \subset \mathbb{F}_2[X]/\left\langle X^5 + X^3 + 1 \right\rangle$

85. Olkoon K kunta, jolla on laajennos L. Osoita, että jos a on transkendenttinen, niin renkaat $K[a]$ ja $K[X]$ ovat isomorfisia.

86. Selvitä itsellesi, mitä ovat äärelliset, äärellisviritteiset ja algebralliset laajennokset. Tutustu myös algebrallisen sulkeuman määritelmään. Tee itsellesi kaavio, joka kuvaa näiden käsitteiden välisiä yhteyksiä. Keksi myös havainnollisia esimerkkejä näistä rakenteista.

87. Todista lause 8.15.

Lisää tehtäviä kuntalaajennoksista

88. Todista lause 8.8 täsmällisesti.

89. Olkoon L kunnan K laajennos ja olkoon $A \subset L$ mielivaltainen joukko K:n suhteen algebrallisia alkioita. Osoita, että $K(A)/K$ on algebrallinen laajennos.

90. Olkoon $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ kaikkien $\mathbb{Q}$:n suhteen algebrallisten lukujen joukko.

    (a) Osoita, että $\mathbb{A}$ on $\mathbb{Q}$:n algebrallinen laajennos.

    (b) Osoita, että $\mathbb{A}$ on algebrallisesti suljettu $\mathbb{C}$:ssä.