

Algebra II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2017

Harjoitus 7

Tehtävistä keskustellaan keskiviikon tapaamisessa 23.3.

Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään tiistaina 22.3. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään tiistaina 30.3.

Kurssin kokonaiskuva

70. Listaa kurssin keskeisimmät käsitteet käyttäen apuna oppimistavoitteita, kurssimateriaalia ja tehtäviä. Tee käsitteistä kaavio, jonka avulla kuvaat ja selität käsitteiden välisiä yhteyksiä.

Kunnat ja kuntalaajennokset

Seuraavissa tehtävissä merkitään $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2$ kuten kunnista puhuttaessa yleensä on tapana.

71. (a) Keksi jokin renkaan $\mathbb{F}_2[X]$ jaoton polynomi, jonka aste on kaksi. Merkitään tätä polynomia tästä lähtien symbolilla p .
- (b) Osoita, että kaikki tekijärenkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ alkioita voi kirjoittaa muodossa $q + \langle p \rangle$, missä $\deg(q) < 2$.
- (c) Määritä tekijärenkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ alkioita.
- (d) Määritä renkaan $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$ yhteen- ja kertolaskutaulut.
- (e) Etsi jokin juuri polynomille p renkaasta $\mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$.
72. Jatkoa edelliseen tehtävään. Merkitään $K = \mathbb{F}_2[X]/\langle p \rangle$.
- (a) Osoita, että tekijärenka K on kunta. (Neuvo: Todistuksessa ei ole tarkoitus käyttää kunnan määritelmää eikä muitakaan määritelmiä.)
- (b) Ajatellaan kuntaa K vektoriavaruuksena, jonka kerroinkunta on \mathbb{F}_2 . Mikä on tämän vektoriavaruuden dimensio? Käytä dimension määritelmää.
- (c) Määritä laajennoksen K/\mathbb{F}_2 aste käyttäen asteen määritelmää.
73. (a) Määritä laajennoksen \mathbb{R}/\mathbb{Q} alirengas $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sekä alilaajennos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Sievennä joukkoja niin pitkälle kuin mahdollista.
- (b) Mikä on laajennoksen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ aste?
74. Osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ja $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ovat isomorfisia \mathbb{Q} -vektoriavaruuksina, mutta eivät kuntina.
75. Määritä laajennoksen \mathbb{C}/\mathbb{Q} alirengas $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$. Sievennä joukkoja niin pitkälle kuin osaat.
76. Olkoon L kunnan K laajennos, ja olkoot $a, b \in L$. Osoita, että $K(a, b) = K(a)(b)$.

Lisää tehtäviä

Valitse näistä tehtävistä kaksi. Kolmannen voit jättää ylimääräiseksi tehtäväksi.

77. Onko rengas $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ Eukleideen alue?
78. Tarkastellaan polynomien $f = X^4 - 1$ ja $g = X^3 + X$ virittämää ideaalia polynomirenkaassa $\mathbb{Z}[X]$.
- (a) Etsi $h \in \mathbb{Z}[X]$, jolle pätee $\langle h \rangle = \langle f, g \rangle$.
 - (b) Osoita, että tekijärenkaassa $\mathbb{Z}[X]/\langle f, g \rangle$ on alkio a , jolle pätee $a^2 = -1$.
79. Tutkitaan \mathbb{Q} -modulia \mathbb{R} . Osoita, että joukko $\{2^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ on vapaa. Päättele tästä, että \mathbb{R} ei ole kunnan \mathbb{Q} äärellinen laajennos.