Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 6

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 2.3.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 1.3. klo 16.00 ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkona 8.3.

Jaollisuus

59. Todista lemma 6.3.
60. Tutkitaan polynomijoukkoa $A = \{p \in \mathbb{Z}_3[X] \mid \deg(p) \leq 2\}$. Piirrä joukon A jaollisuusjärjestystä kuvaava kaavio samaan tapaan kuin luentomateriaalin sivulla 53. Mieti samalla, mitkä alkiot ovat yksiköitä, mitkä jaottomia ja mitkä ovat kunkin alkion liittoalkiot.
61. Osoita, että kahden alkion kaikki suurimmat yhteiset tekijät ovat toistensa liittoalkioita.
62. Täydennä esimerkin 6.9 puuttuvat yksityiskohdat. Toisin sanoen osoita, että renkaan $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ alkio 2 ei jaa kumpaakaan luvuista $1 + i\sqrt{5}$ ja $1 - \sqrt{5}$.
63. Todista lause 6.11.

Renkaat

64. (a) Tutustu polynomien universaalisuusominaisuuteen (lause 4.13). Miltä universaalisuusominaisuus näyttää, kun polynomirenkaassa on vain yksi tuntematon? Kirjoita universaalisuusominaisuus uudelleen tässä tapauksessa.
    (b) Onko olemassa $\mathbb{R}$-algebrahomomorfismia $f \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x^2 - 1) = 3$ ja $f(2x^3 + x + 1) = 19$?
    (c) Miten sijoitushomomorfismit liittyvät polynomien universaalisuusominaisuuteen?
65. (a) Osoita, että kokonaislukukertoimisten polynomien renkaassa $\mathbb{Z}[X]$ ideaali $\langle X \rangle$ on alkuideaali, mutta ei maksimaalinen ideaali. (Tätä tehtävää ei ole tarkoitus tehdä määritelmän perusteella, vaan käyttää sen sijaan valmiita tuloksia. Jos tehtävän tekeminen ei suju, voit katsoa vinkin tehtäväpaperin lopusta.)
    (b) Onko renkaan $\mathbb{Q}[X]$ ideaali $\langle X \rangle$ maksimaalinen?

Lisää tehtäviä

66. Osoita, että jos I ja J ovat renkaan R ideaaleja ja J sisältää I:n, niin J on yhdiste eräistä I:n sivuluokista.
67. Olkoon R kaikkien jatkuvien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama rengas. Osoita, että $\{f \in R \mid f(0) = 0\}$ on R:n maksimaalinen ideaali.
68. Selvitä, mitä ovat Artinin renkaat. (Tätä ei kerrota luentomateriaalissa.) Osoita, että jos Artinin rengas on kokonaisalue, se on myös kunta.

Ylimääräinen tehtävä

69. Selvitä, mitä ovat Noetherin renkaat. (Tätä ei kerrota luentomateriaalissa.) Osoita, että jokainen pääideaalirengas on Noetherin rengas.

Vihje tehtävään 65 Mieti, minkä tutun $\mathbb{Z}$-algebran kanssa $\mathbb{Z}[X]/\langle X\rangle$ on isomorfinen. Osoita sitten isomorfisuus polynomien universaalisuusominaisuuden avulla. (Sitä käsitellään lausessa 4.13. Sinun ei tarvitse lukea lausetta edeltävää polynomialgebroiden konstruktiota tässä vaiheessa, jos et halua.)