Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 4

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 23.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 22.2.ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkona 1.3.

Renkaat

49. Oletetaan, että I on renkaan R ideaali ja $1 \in I$. Miltä I näyttää?

50. Osoita lemma 5.1. (Vinkki: Älä tee kaikkea käsin, vaan yritä käyttää hyväksesi valmiita tuloksia niin paljon kuin pystyt.)

51. (a) Osoita määritelmän nojalla, että $3\mathbb{Z}$ on renkaan $\mathbb{Z}$ maksimaalinen ideaali.
    (b) Miten muuten kuin määritelmään nojautuen voit osoittaa a)-kohdan tuloksen?
    (c) Mitä muita renkaan $\mathbb{Z}$ maksimaalisia ideaaleja keksit?

52. Osoita, että vaihdannaisen renkaan R tekijärengas R/I on kokonaisalue, jos ja vain jos I on renkaan R alkuideaali.

Algebrat ja modulit

53. Määritellään $\mathbb{R}$-modulissa $\mathbb{R}^2$ kertolasku kaavalla

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

    (a) Onko näin saatava rakenne $\mathbb{R}$-algebra?
    (b) Onko kyseessä kunta?
    (c) Millaisella kertolaskulla modulista $\mathbb{R}^2$ saa kunnan?

54. (a) Osoita, että $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ on isomorfinen matriisimodulin $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ kanssa.
    (b) Etsi kanta modulille $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$.
    (c) Osoita, että kaikkia modulin $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ alkioita ei voi kirjoittaa muodossa $x \otimes y$, missä $x, y \in \mathbb{Z}^2$.

55. Olkoon A liitännäinen ja ykköisellinen R-algebra. Osoita, että on olemassa R-algebrojen homomorfismi $\varphi\colon R \to A$, jolle $\varphi(1_R) = 1_A$. Jos R on kunta ja A on epätriviaali (eli $A \neq \{0\}$), osoita, että R voidaan upottaa A:n alialgebraksi.

Oppimistesti

56. Tee Moodlesta löytyvä oppimistesti 2, joka käsittelee moduleita ja algebroita.

Lisää tehtäviä

57. Osoita, että jos I ja J ovat renkaan R ideaaleja ja J sisältää I:n, niin J on yhdiste eräistä I:n sivuluokista.

58. Osoita, että on olemassa vain kolme keskenään epäisomorfista 2-ulotteista ykköselllistä $\mathbb{R}$-algebraa.

    Vihje: Tarkastele kantavektorien kertotaulua.