Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 4

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 17.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 16.2. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkon 23.2.

Vapaiden modulien universaalisuusominaisuus

39. (a) Kuinka monta lineaarikuvausta $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ on olemassa, joille pätee $T(1,0,0) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (-1,1)$ ja $T(1,1,1) = (0,0)$? Määritä kuvausten kaavat. (Käytä apuna lineaarialgebran kurssilta tuttuja tuloksia.)

    (b) Tutustu vapaiden modulien universaalisuusominaisuuteen. Miten se liittyy (a)-kohtaan?

    (c) Tutkitaan $\mathbb{Q}$-moduleita $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Keksi $\mathbb{Q}$-lineaarinen kuvaus $\phi\colon \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\phi(e_1) = -17$ ja $\phi(e_2) = 3$. Määritä universaalisuusominaisuuden avulla kaikki $\mathbb{Q}$-lineaariset kuvaukset, joille annetut ehdot pätevät.

    (d) Etsi universaalisuusominaisuuden avulla isomorfismi vektoriavaruuksien

    $$W = \{(2a - 4b,\ c,\ a + b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

    ja

    $$U = \{2ax^3 + (3b - c)x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}_3$$

    välille.

Tensoritulo

40. Tässä esimerkissä tutustutaan skalaarien laajennukseen, joka on yksi tensoritulon sovelluksista. Tutustu tehtävää tehdessäsi esimerkkiin 3.15.

    Olkoon R renkaan S alirengas. Oletetaan, että M on R-moduli. Kuten esimerkissä mainitaan, modulissa $M_S = S \otimes_R M$ on mahdollista määritellä renkaan S skalaarikertolasku kaavalla

    $$a.\left(\sum_i s_i \otimes m_i\right) = \sum_i (as_i) \otimes m_i,$$

    missä $a \in S$ ja $\sum_i s_i \otimes m_i$ on modulin M_S mielivaltainen alkio.

(a) Tarkista, että $\mathbb{Z}^4$ ei ole $\mathbb{Q}$-moduli, jos skalaarikertolasku määritellään luonollisella tavalla. millään luonnollisella tavalla.

(b) Ryhmästä $\mathbb{Z}^4$ voidaan muodostaa tensoritulon avulla $\mathbb{Q}$-moduli $\mathbb{Z}^4_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^4$. Määritä seuraavat modulin $\mathbb{Z}^4_{\mathbb{Q}}$ alkiot:

i) $\frac{1}{2} . \big(3 \otimes (-5, 9, 0, 1) \big)$ ii) $-\frac{5}{2} . \big(3 \otimes (-5, 9, 0, 1) + (-4) \otimes (-1, -1, 2, 2) \big)$

(c) Osoita, että $M_S = S \otimes_R M$ on S-moduli

(d) Osoita tensoritulon universaalisuusominaisuuden nojalla, että $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Q}^m$. Voit tarvittaessa katsoa tähän tehtävään apua tehtäväpaperin lopusta. (Bijektiivisyyden osoittaminen voi olla aika sotkuista, joten ratkaisuehdotuksen tekijät voivat halutessaan jättää siitä pahimmat kohdat väliin.)

41. Todista lauseen 3.14 kohta iv).

Algebrat

42. Selvitä itsellesi, mitä algebrat ovat. Yhdistä se aiemmin oppimiesi algebrallisten rakenteiden määritelmiin. Miten voisit osata algebran määritelmän ilman, että sinun tarvitsee opetella sen yksityiskohtia ulkoa?

43. Harjoituksessa 3 tutustuttiin vapaaseen moduliin $\mathbb{C}^{(S_3)}$. Jatketaan sen tutkimista. Kyseisessä modulissa voidaan määritellä bilineaarinen kertolasku, joka on kannan vektoreilla täsmälleen sama kuin permutaatioryhmän S_3 kertolasku. Tämä kertolasku tekee modulista $\mathbb{C}^{(S_3)}$ algebran.

    Merkitään $\sigma = (132)$, $\tau = (12)$ ja $\rho = (123)$. Määritä bilineaarisuuteen nojautuen seuraavat tulot:

    (a) $\sigma(\tau + \rho)$ (b) $(4\sigma)(-5\rho)$ (c) $(3\sigma + i\tau)(i\sigma - 2\tau)$

44. (a) Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että joukko

$$K = \{a_0 I + a_1 A + a_2 B + a_3 C \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$$

on $\mathbb{R}$-algebran $\mathbb{C}^{2\times 2}$ alialgebra.

(b) Tutustu esimerkissä 4.9 esiteltyyn kvaternioalgebraan

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Voit hypätä kyseiseen esimerkkiin ilman, että luet kaikkea sitä edeltävää teoriaa.

Halutaan määritellä modulihomomorfismi $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, jolle pätee

$$f(1) = I, \quad f(i) = A, \quad f(j) = B, \quad f(k) = C.$$

Mistä tiedetään, että tällainen modulihomomorfismi on olemassa? (Vinkki: Tätä ei ole tarkoitus osoittaa modulihomorfismin määritelmään nojautuen.)

(c) Osoita, että f on algebrahomomorfismi.

(d) Osoita, että algebrat K ja $\mathbb{H}$ ovat isomorfisia.

45. Todista lauseen 4.5 kohta ii).

Lisää tehtäviä

46. Muotoile ja todista ryhmien homomorfialausetta vastaava tulos moduleille.

47. Todista lauseen 3.14 kohta iii). (Vihje: Tarvitset suoran summan universaalisuusominaisuutta.)

48. Oletetaan, että A on R-moduli, ja $f\colon A \to A$ on R-modulihomomorfismi, jolle pätee $f \circ f = f$. Osoita, että tällöin

$$A \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Apu tehtävään 40 Aloita osoittamalla, että kuvaus

$$f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Q}^m, \quad (q, (a_1, \ldots, a_m)) \to (qa_1, \ldots, qa_m)$$

on bilineaarinen. Käytä sen jälkeen tensoritulon universaalisuusominaisuutta.