**Algebra II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Kevät 2017**
**Harjoitus 3**

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 9.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikona 8.2. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkona 16.2.

## Oppimistesti

Tee Moodlesta löytyvä tekijästruktuureita ja homomorfismeja koskeva oppimistesti. (Oppimistesti valmistuu torstain 2.2. aikana.) Tee oppimistesti, vaikka et vielä hallitsisikaan näitä aihepiirejä. Testi kertoo, mitä sinun kannattaa opiskella seuraavaksi.

## Modulit

29. Osoita, että jos $f\colon M \to N$ on modulihomomorfismi, niin $\operatorname{Im} f$ on modulin $N$ alimoduli ja $\operatorname{Ker} f$ on modulin $M$ alimoduli.

30. Osoita, että jokainen $\mathbb{Z}$-modulin $\mathbb{Q}$ vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion, ja päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa moduli.

31. Tutustu lauseeseen 2.7 ja sen todistukseen.
    (a) Osoita, että $\varphi$ on injektio, jos ja vain jos $f$ on injektio ja $f(B)$ on vapaa.
    (b) Osoita, että $\varphi$ on surjektio, jos ja vain jos $f(B)$ virittää modulin $N$.

## Modulikonstruktioita

32. (a) Polynimit kirjoitetaan useimmiten formaaleina summina $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$. Niitä ei kuitenkaan aina määritellä näin. Miten polynomit määriteltiin aiemmalla algebran kurssilla? Miksi luulet, että näin tehtiin?
    (b) Kirjoita polynomi $-4x^5 - 18x^2 + x - 6/7 \in \mathbb{Q}[x]$ perheenä $(a_i)_{i\in I}$.
    (c) Perheet ovat kuvauksia. Olkoon $f = (a_i)_{i\in I}$ edellisen kohdan polynomia vastaava perhe. Mikä on sen lähtöjoukko? Entä maalijoukko? Määritä $f(2)$ ja $f(100)$.
    (d) Tutustu suoriin summiin. Kirjoita polynomirengas $\mathbb{Q}[x]$ suorana summana. Mitä tekee kanoninen injektio $\iota_7$?
    (e) Mitkä ovat edellisen kohdan suoran summan luonnollisen kannan alkiot? Kirjoita kannan alkiot formaaleina summina.

33. Tutustu modulien suoriin tuloihin ja summiin.
    (a) Miltä näyttävät suoran tulon $\Pi_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkiot? Anna esimerkkejä alkioista.
    (b) Miltä näyttävät suoran summan $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^{2\times 2}$ alkiot? Anna esimerkkejä alkioista.
    (c) Miten suoran tulon alkiot eroavat suoran summan alkioista?
    (d) Millainen kuvauksia ovat kanoniset projektiot a-kohdan modulin tapauksessa? Anna esimerkki jonkin alkion kuvasta kanonisessa projektiossa.

(e) Millaisia kuvauksia ovat kanoniset injektiot b-kohdan modulin tapauksessa? Anna esimerkit jonkin alkion kuvasta kanonisessa injektiossa.

(f) Valitse suorasta summasta $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^{2\times 2}$ jonkin alkio $x$ ja kirjoita se summana alkioista $\iota_i(x)$.

34. Tutkitaan modulia $\mathbb{C}^{(S_3)}$. Tämän merkinnän määritelmä löytyy luvusta 3.1.

(a) Anna esimerkki modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ alkiosta. Miltä näyttää modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ kanta?

(b) Luentomateriaalissa on kerrottu, kuinka modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ kanta-alkiot voidaan samastaa joukon $S_3$ alkioiden kanssa. Mitä joukon $S_3$ alkiota kukin kanta-alkio vastaa?

(c) Tutkitaan modulin $\mathbb{C}^{(S_3)}$ alkioita $x = 4(132) - i(12)$, $y = -\sqrt{8}(12)$ sekä $z = 14(132) + (123) + 2i(13)$. Määritä alkiot $5ix$, $x + y$ sekä $5x + 3y - z$.

(d) Minkä tutun modulin kanssa $\mathbb{C}^{(S_3)}$ on isomorfinen?

35. Tässä tehtävässä tutkitaan, kuinka ristitulo voidaan kirjoittaa tensoritulon avulla. Lue tehtävää tekiessäsi esimerkkiä 3.10.

(a) Jos vektorien ristitulo ei ole sinulle entuudestaan tuttu käsite, tutustu siihen esimerkiksi kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I materiaalin avulla.

(b) Tarkista linearialgebran materiaalin avulla, että ristitulo on bilineaarinen tulo.

(c) Esimerkin 3.10 merkintöjä käyttäen, mitä ovat ristitulon tapauksessa $R$, $m$, $n$, $P$ ja $L$? Jos tehtävä tuntuu kovin vaikealta, voit katsoa vastauksen tehtäväpaperin lopusta ja jatkaa eteenpäin.

(d) Laske $f((0, 5, -2), (-1, 3, 2))$.

(e) Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}^3$. Laske $f(x, y)$. Vertaa saamaasi tulosta ristituloon $x \times y$.

36. (a) Tutkitaan modulin $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{3\times 2}$ alkioita

$$a = (-1, 2) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = (0, 1) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad c = (-1, 2) \otimes \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laske $a + b$, $3a$ ja $a - 2c$.

(b) Kurssimateriaalin perusteella tiedetään, että tensoritulon $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{3\times 2}$ alkiot voidaan kirjoittaa muodossa $\sum_i x_i \otimes y_i$, missä $x_i \in \mathbb{R}^2$ ja $y_i \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ kaikilla $i$. Näytä, että tämä kirjoitustapa ei ole yksikäsitteinen.

## Lisää tehtäviä moduleista

37. Olkoon $R$ vaihdannainen rengas, $I$ ja $J$ renkaan $R$ ideaaleja. Tekijäryhmälle $R/I$ voidaan antaa $R$-modulin struktuuri määrittelemällä $r.(x + I) = rx + I$. Osoita:

(a) Jos $R$-modulit $R/I$ ja $R/J$ ovat isomorfisia, niin $I = J$.

(b) Jos renkaat $R/I$ ja $R/J$ ovat isomorfisia, voi kuitenkin olla $I \neq J$.

38. Osoita, että $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Q}$ ei ole äärellisesti viritetty, t.s. ei löydy äärellistä osajoukkoa $A \subset \mathbb{Q}$, jolle $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$.

**Apu tehtävään 35** Valitse $R = \mathbb{R}$, $m = n = 3$, $P = \mathbb{R}^3$ ja

$$L\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3, \quad L(A) = (A_{23} - A_{32},\ A_{31} - A_{13},\ A_{12} - A_{21}).$$