Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 2

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 3.2.
Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 2.2.

Homomorfismit

15. Tutkitaan ryhmähomomorfismia $f\colon \mathbb{Z} \to S_4$, $f(k) = (1423)^k$.
    (a) Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on normaali aliryhmä $3\mathbb{Z}$. Onko mahdollista määritellä kuvaus
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + 3\mathbb{Z}) = f(k)$? (Tässä ei ole tarkoitus käyttää mitään kurssimateriaalin tulosta, vaan miettiä kuvauksen määritelmää.)
    (b) Ryhmällä $\mathbb{Z}$ on normaali aliryhmä $8\mathbb{Z}$. Onko mahdollista määritellä kuvaus
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + 8\mathbb{Z}) = f(k)$? (Tässä ei ole tarkoitus käyttää mitään kurssimateriaalin tulosta, vaan miettiä kuvauksen määritelmää.)
    (c) Miten a- ja b-kohta liittyvät ekvivalenssirelaatioihin sekä ekvivalenssirelaatioiden kanssa yhteensopiviin kuvauksiin?
    (d) Millainen normaalin aliryhmän N on oltava, jotta olisi mahdollista määritellä homomorfismi
    $$\bar{f}\colon \mathbb{Z}/N \to S_4$$
    ehdolla $\bar{f}(k + N) = f(k)$?

16. Tutustu Moodlesta löytyvään itseselittämisen strategiaan. Lue sen jälkeen homomorfismien hajottamista käsittelevä lause 1.13 sekä lauseen todistus käyttäen itseselittämisen strategiaa.

17. Käytä tässä tehtävässä mahdollisimman paljon valmiita tuloksia aiemmilta algebran kursseilta.
    (a) Osoita, että jokaisella $n \in \{2, 3, ...\}$ on olemassa ryhmän $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä H siten, että $H \cong \mathbb{Z}_n$. Tee tämä käyttäen ryhmien homomorfialausetta.
    (b) Osoita, että ryhmällä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa isomorfista aliryhmää.
    (c) Osoita, että ryhmällä $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa isomorfinen aliryhmä.

18. Osoita, että on olemassa ryhmähomomorfismi $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m, f([x]_n) = [x]_m$, jos ja vain jos $m \mid n$. Tee tämä käyttämällä lausetta 1.15.

Vektoriavaruudet

Voit kerrata lineaarialgebran käsitteitä ja tuloksia tarpeen mukaan kurssien Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II kurssimonisteista.

19. Tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektoreita
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Virittävätkö vekorit avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Onko niiden muodostama jono vapaa? Muodostavatko ne avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kannan?

20. Etsi isomorfismi vektoriavaruuksien
$$W = \{(2a - 4b,\ c,\ a + b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$
ja
$$U = \{2ax^3 + (3b - c)x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}_3$$
välille tai osoita, että se ei ole mahdollista.

21. Kertaa vektoriavaruuden määritelmä. Kirjoita se uudelleen käyttämällä algebran kursseilta tuttuja käsitteitä.

Modulit

22. Tutkitaan ryhmän S_6 alkiota $\sigma = (15463)$ ja sen virittämää aliryhmää $H = \langle \sigma \rangle$. Oletetaan, että ryhmässä H on määritelty renkaan $\mathbb{Z}$ skalaarikertolasku, joka tekee H:sta $\mathbb{Z}$-modulin. Määritä seuraavat ryhmän H alkiot. Käytä perusteluissasi modulin määritelmää 2.1.

    (a) $1.\sigma$ (b) $2.\sigma$ (c) $3.\sigma$ (d) $0.\sigma$ (e) $(-1).\sigma$

23. Oletetaan, että M on $\mathbb{Z}$-moduli. Osoita, että tällöin skalaarikertolasku määritellään kaavalla $k.x = kx$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $x \in M$. (Tässä kx on monikerta.)

24. (a) Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}$ osajoukkoa $S = \{4, 8, -6\}$. Määritä osajoukon S virittämä aliryhmä $\langle S \rangle$. (Lisätehtävä: Oletetaan, että $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{Z}$. Määritä $\langle S \rangle$.)
    (b) Olkoon M moduli, jolla on alimodulit A ja B. Osoita, että $A + B = \langle A \cup B \rangle$. (Tässä $\langle A \cup B \rangle$ on joukon $A \cup B$ virittämä aliryhmä.)

25. (a) Onko $\mathbb{Z}_4^{2\times 3}$ vapaa $\mathbb{Z}_4$-moduli?
    (b) Onko (a)-kohdan moduli vektoriavaruus?

Lisää tehtäviä

26. Olkoot M, G ja η kuten alaluvussa 1.3. Oletetaan lisäksi, että H on vaihdannainen ryhmä ja $f \colon M \to H$ monoidihomomorfismi.

    Osoita, että on olemassa ryhmähomomorfismi $g \colon G \to H$, jolle pätee $f = g \circ \eta$.

27. Oletetaan, että M on vaihdannainen ryhmä, jonka kertaluku on n. Osoita, että M on $\mathbb{Z}_n$ moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $[k]_n.m = km$ kaikilla $[k]_n \in \mathbb{Z}_n$ ja $m \in M$. (Muista osoittaa, että skalaarikertolaskun voi ylipäätään määritellä edellä mainitulla tavalla eli että se on kuvaus $\mathbb{Z}_n \times M \to M$.)

28. Osoita, että jokainen rationaaliluku voidaan ilmaista summana
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{m_i}{p_i^{k_i}},$$
jossa osoittajat ovat kokonaislukuja ja nimittäjät alkulukujen potensseja.

    Tämä tehtävä on osa luentomateriaalin esimerkkiä 2.4.