

Algebra II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2017
Harjoitus 12

Tehtävistä keskustellaan torstain tapaamisessa 4.5.

Ratkaisujen laatijat laittavat ratkaisuehdotuksensa Moodleen viimeistään keskiviikkona 3.5. ja korjatut ratkaisuehdotukset viimeistään keskiviikkona 10.5.

Kompositiojonot ja ratkeavat ryhmät

123. Määritä jokin kompositiojono seuraaville ryhmille. Minkä ryhmien kanssa kompositiojonojen tekijät ovat isomorfisia?

- (a) \mathbb{Z}_{18}
- (b) D_5
- (c) S_4

Vertaa kompositiojonojasi toisten saamiin kompositiojonoihin. Onko niissä eroa? Mikä kuitenkin on yhteistä? Miten tämä liittyy Jordanin-Hölderin lauseeseen?

124. Osoita, että seuraavat ryhmät ovat ratkeavia:

- (a) Ryhmä, jonka kertaluku on 1.
- (b) Ryhmät, joiden kertaluku on 2, 3, 5, tai 7.
- (c) Ryhmät, joiden kertaluku on 4.
- (d) Ryhmät, joiden kertaluku on 6 tai 10.
- (e) Ryhmät, joiden kertaluku on 8 tai 9.

Olet nyt osoittanut, että kaikki ryhmät, joiden kertaluku on korkeintaan 10, ovat ratkeavia.

Vapaat ryhmät

125. Tutkitaan ryhmää $G = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b \rangle$.

- (a) Kirjota alkiot $abab$ ja $b^4a^{-3}b$ muodossa $a^n b^m$, missä $n, m \in \mathbb{N}$.
- (b) Montako alkioita ryhmässä G on korkeintaan? Etsi niin hyvä yläraja kuin pystyt.
- (c) Kirjoita kaava, joka kuvailee kahden ryhmän G mielivaltaisen alkion tuloa.

Lisätehtävä: Kuinka monta alkioita ryhmässä G on? Minkä tutun ryhmän kertotaulu on kyseessä?

126. (a) Osoita, että

$$D_n = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2, s_2^2, (s_1 s_2)^n \rangle.$$

- (b) Mitä säännöllisen n -kulmion symmetrioita a)-kohdan virittäjät s_1 ja s_2 vastaavat?

127. (a) Miltä näyttävät ryhmän $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ alkiot? Mikä on ryhmän laskutoimitus?

- (b) Kirjoita ryhmä \mathbb{Z}_{18} suorana summana Äärellisten vaihdannaisten ryhmien peruslauseen kuvaamalla tavalla.
- (c) Kuinka monta 20 alkion vaihdannaista ryhmää on olemassa?

Lisää tehtäviä

Valitse seuraavista tehtävistä kaksi. Jäljelle jäävät tehtävät ovat ylimääräisiä tehtäviä, joilla voi korvata muita tehtäviä.

128. Tarkastellaan niin kutsuttua viidentoista peliä. Siinä 4×4 -kehikkoon on asetettu viisitoista numeroitua neliötä. Neliöt voivat liikkua toistensa suhteen niin, että tyhjän paikan vierellä oleva neliö siirretään tyhjään paikkaan. Peli ratkaistaan järjestämällä neliöt numerjärjestykseen vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas niin, että tyhjä neliö on oikeassa alalaidassa.

Osoita, että oheisessa kuvassa esitetty asema on mahdoton ratkaista. (Käytä tarvittaessa tehtäväpaperin lopussa olevaa vihjetä.)

1	2	3	14
10	6	7	8
9	4	11	12
13	5	15	

129. Etsi ryhmän S_4 esitys, jossa käytät kolmea virittäjää, joiden kaikkien kertaluku on kaksi. (Käytä tarvittaessa tehtäväpaperin lopussa olevaa vihjetä.)
130. Kirjoita ryhmä \mathbb{Z}_{63} äärelisviritteisten vaihdannaisten ryhmien peruslauseen antamassa muodossa.
131. Tee ainakin toinen seuraavista:
- Osoita, että ratkeavan ryhmän aliryhmät ovat ratkeavia.
 - Osoita, että ratkeavien ryhmien äärellinen suora summa on ratkeava.

Vihje tehtävään 128: Käsittele vain sellaisia asemia, joissa tyhjä ruutu on oikeassa alakulmassa. Jokainen siirto, joka johtaa yhdestä tällaisesta asemasta toiseen, voidaan kirjoittaa permutaationa. Määritä tällaisen permutaation etumerkki.

Vihje tehtävään 129: Valitse virittäjät $s_1 = (12)$, $s_2 = (23)$ ja $s_3 = (34)$.